本日やること

1. 積分法
   - 復習：原始関数と不定積分
   - 復習：不定積分の置換積分法
   - 三角関数の有理関数の積分法
   - 逆三角関数 (その 2)
   - 二次無理関数の有理関数

積分法

原始関数

復習：原始関数・不定積分の定義

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数 $\iff$ $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$

$f(x)$ の 原始関数の 1 つを $F(x)$ で表すと，すべての原始関数は

$$F(x) + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

で表される．これを $f(x)$ の不定積分とよび

$$\int f(x)\,dx$$

で表す。定数 C を積分定数という．要するに

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

積分法

主な関数の不定積分

(i) $\displaystyle \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$

(ii) $\displaystyle \int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$

(iii) $\displaystyle \int e^{x}\,dx = e^{x} + C$

(iv) $\displaystyle \int \sin x\,dx = -\cos x + C = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$

(v) $\displaystyle \int \cos x\,dx = \sin x + C = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$

今後積分定数 C は省略することにする.

積分法

不定積分の性質：線形性

不定積分の性質：線形性

(i) $$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(ii) $$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (k \text{ は定数})$$

積分法

不定積分の置換積分法

復習：不定積分の置換積分法

(i) 関数 $f(x)$ が原始関数をもち, $t = \varphi(x)$ が微分可能であるとき

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

(ii) $x = \psi(t)$ が微分可能であるとき

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt.$$

積分法

不定積分の置換積分法

[置換積分法の考え方] (i) も (ii) も次のことをしている。

(I) $t=\varphi(x)$ または $x=\psi(t)$ となる変数 t を考え,
$\varphi(x)$ を t で, または x を $\psi(t)$ でおきかえる。

(II) (i) の場合 $t=\varphi(x)$ を x で微分して $\dfrac{dt}{dx}=\varphi'(x)$, 両辺に $\frac{dx}{\varphi'(x)}$ をかけて

$$dx=\frac{dt}{\varphi'(x)},$$

(ii) の場合 $x=\psi(t)$ を t で微分して $\dfrac{dx}{dt}=\psi'(t)$, 両辺に dt をかけて

$$dx=\psi'(t)dt,$$

(III) 以上により x, dx を t, dt でおきかえる。

このおきかえで $\displaystyle\int$ (t の関数) dt の形になると, 積分がうまくいく場合がある。

積分法

不定積分の置換積分法

[例 1] $\displaystyle\int \frac{1}{2x+3}\,dx$ を計算する。

$$2x+3=t\cdots\spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$2=\frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{2}$ をかけて

$$dx=\frac{dt}{2}\cdots\heartsuit$$

$\spadesuit$, $\heartsuit$ で置き換えて

$$\int \frac{1}{2x+3}\,dx=\int \frac{1}{t}\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{2}\log|t|=\frac{1}{2}\log|2x+3|$$

積分法

復習：いろいろな初等関数の原始関数

初等関数の導関数は初等関数である。

初等関数の原始関数は初等関数とは限らない。

[原始関数が初等関数となる関数の例]

有理関数：$F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $(P(x)$, $Q(x)$ は x の多項式) $\longrightarrow$ 前回やった。

三角関数の有理関数：$\dfrac{1}{\sin x + \cos x + 1}$ など。$\longrightarrow$ 本日やる。

二次無理関数の有理関数：$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ など。$\longrightarrow$ 本日やる。

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[例] $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ を使う。

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \quad = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{\cos 2x}{2}\,dx$$

$2x = t$ とおくと $dx = \dfrac{dt}{2}$ だから

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos t\,\frac{dt}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin t = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$$

[例] $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x$ を使う。

$$\int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \int (1-t^2)(-dt)$$

$$= \frac{t^3}{3} - t = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$$

積分法

三角関数の有理関数の積分法

$R(X,Y)$：X,Y の有理関数 $\Rightarrow$ $\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ は初等関数になる。

なぜなら

三角関数の有理関数の積分法

$$\tan\frac{x}{2} = t \qquad (-\pi < x < \pi)$$

によって積分変数を x から t に変換すると

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \text{ だから}$$

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

のように t の有理関数の積分に帰着されるからである。

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[確かめ]　$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割って　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

2 倍角の公式により

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

また

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1+t^2}{2}$$

より

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[例]

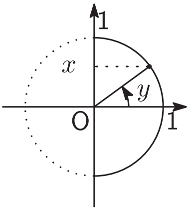
$$\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t}$$

$$= \log|1+t| = \log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|$$

積分法

逆三角関数 (その 2)

復習：逆三角関数 $\sin^{-1}$ の定義



$$y = \sin^{-1} x, \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

であることを

$$x = \sin y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

でさだめる。

復習：逆三角関数 $\sin^{-1}$ の導関数

a を正の定数とするとき

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

二次無理関数の有理関数の積分

$R(X,Y)$ を X,Y の有理関数とするとき，$\displaystyle\int R(x, \sqrt{x\ \text{の二次関数}})\,dx$ は初等関数になる。

a を定数とするとき

$$\sqrt{x^2-a^2},\quad \sqrt{x^2+a^2},\quad \sqrt{a^2-x^2}$$

の場合に帰着されることが分かっている。
証明は省略する。重要な例を説明しよう。

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

[例] a が正の定数のとき

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

を示す

$x = a\sin t,\quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと, この区間では $\cos t \geqq 0$ であり

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\cos t, \qquad \frac{dx}{dt} = a\cos t \ \text{ より } \ dx = a\cos t\, dt$$

であるから

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int a^2\, \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt \\ &= a^2\left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right) = a^2\left(\frac{\sin t\cos t}{2} + \frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

ところで

$$\sin t = \frac{x}{a},\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2},\ t = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

であるから

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

[例]

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \log(x+\sqrt{x^2+1})$$

を示す．

$x = \tan t, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，この区間では $\cos t > 0$ であり

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{1}{\cos t}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ より } dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

であるから

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\cos t}\,dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

$s=\sin t$ とおくと $ds=\cos t dt$ だから

$$=\int \frac{ds}{1-s^2}=-\frac{1}{2}\log|s-1|+\frac{1}{2}\log|s+1|=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right|$$

$\sin t=\dfrac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ だから

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right|=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

[別解] $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくと

$$x^2 + 1 = \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} + 1 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ だから } dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2}dt$$

だから

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{e^t + e^{-t}}{2}}\,\frac{e^t + e^{-t}}{2}\,dt = \int dt = t$$

ところで

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ を } t \text{ について解くと } t = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

だから

$$= \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

となる。

$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ を双曲線正弦関数といい $\sinh x$ で表す。