本日やること

1. 積分法
   - 不定積分の置換積分法
   - 不定積分の部分積分法

積分法

不定積分の置換積分法

[複雑な関数の積分法]

不定積分の定義

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x)\ (+C) \cdots (\star)$$

したがって

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) = x^3 \text{ だから } \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$$

でも

$$\int (2x+3)^3\,dx = \frac{(2x+3)^4}{4}$$ は誤り

積分法

不定積分の置換積分法

正しくは, $2x+3=t$ とおくと合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x+3)^4}{4}\right)=\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{t^4}{4}\right)=2\cdot t^3=2\cdot(2x+3)^3$$

だから $\displaystyle\int 2\cdot(2x+3)^3\,dx=\frac{(2x+3)^4}{4}$

だから $\displaystyle\int (2x+3)^3\,dx=\frac{(2x+3)^4}{2\cdot 4}$

積分法

不定積分の置換積分法

[一般化]

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

のとき x を $\varphi(x)$ でおきかえると $\varphi(x) = t$ とおいて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}\left(F(\varphi(x))\right) = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}F(t)$$

$(\star)$ より $\frac{d}{dt}F(t) = f(t)$ だから

$$= \varphi'(x)f(t) = \varphi'(x)f(\varphi(x))$$

だから

$$\int \varphi'(x)f(\varphi(x))\,dx = F(\varphi(x)) = F(t) = \int f(t)\,dt$$

積分法

不定積分の置換積分法

まとめると

定理：不定積分の置換積分法

(i) 関数 $f(x)$ が原始関数をもち, $t=\varphi(x)$ が微分可能であるとき

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$$

(ii) $x=\psi(t)$ が微分可能であるとき

$$\int f(x)\,dx=\int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt.$$

(i), (ii) により x の関数の x による積分を t の関数の t による積分に置き換えること,(あるいはその逆) を積分変数の変換または置換積分法という。
(ii) は (i) で x を t に, φ を ψ に置き換えたもの。

積分法

不定積分の置換積分法

[置換積分法の考え方] (i) も (ii) も次のことをしている。

(I) $t = \varphi(x)$ または $x = \psi(t)$ となる変数 t を考え,
$\varphi(x)$ を t で, または x を $\psi(t)$ でおきかえる。

(II) (i) の場合 $t = \varphi(x)$ を x で微分して $\dfrac{dt}{dx} = \varphi'(x)$, 両辺に $\frac{dx}{\varphi'(x)}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{\varphi'(x)},$$

(ii) の場合 $x = \psi(t)$ を t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = \psi'(t)$, 両辺に dt をかけて

$$dx = \psi'(t)dt,$$

(III) 以上により x, dx を t, dt でおきかえる。

このおきかえで $\displaystyle\int (t \text{ の関数})\, dt$ の形になると, 積分がうまくいく場合がある。

積分法

不定積分の置換積分法

[例 1]　$\displaystyle\int (2x+3)^3\,dx$ を計算する。

$$2x+3=t\cdots\spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$2=\frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{2}$ をかけて

$$dx=\frac{dt}{2}\cdots\heartsuit$$

$\spadesuit$, $\heartsuit$ で置き換えて

$$\int (2x+3)^3\,dx=\int t^3\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^3\,dt=\frac{1}{2}\frac{t^4}{4}=\frac{(2x+3)^4}{8}$$

積分法

不定積分の置換積分法

[例 2] $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ を計算する。

$$x^2+1=t\cdots\spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$2x=\frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{2x}$ をかけて

$$dx=\frac{dt}{2x}\cdots\heartsuit$$

$\spadesuit$, $\heartsuit$ で置き換えて

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx=\int \frac{x}{t}\,\frac{dt}{2x}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{2}\log t=\frac{1}{2}\log|x^2+1|$$

積分法

不定積分の置換積分法

[例 3] $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$ を計算する。

$$\sin x = t \cdots ♠$$

とおく。両辺 x で微分して

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{\cos x}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{\cos x} \cdots \heartsuit$$

♠, $\heartsuit$ で置き換えて

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1+t}\,\frac{dt}{\cos x} = \int \frac{1}{1+t}\,dt = \log|1+t| = \log|1+\sin x|$$

積分法
不定積分の部分積分法

定理：不定積分の部分積分法＝積の積分法

$f(x)$, $g(x)$ ：共に微分可能, $f'(x)$, $g'(x)$: 共に連続であるとき

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

[確かめ] 積の微分法の逆である。

積の微分法 : $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

両辺を積分 : $$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

右辺第 2 項を移項すればよい.

積分法

不定積分の部分積分法

[例題] (1) $f'(x) = e^x$, $g(x) = x$ とおくと $f(x) = \int e^x\,dx = e^x$ だから

$$\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int (x)'e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

(2) $f'(x) = 1$, $g(x) = \log x$ とおくと, $f(x) = \displaystyle\int 1\,dx = x$, $g'(x) = (\log x)' = \dfrac{1}{x}$

であるから

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int x(\log x)'\,dx \\ &= x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x.\end{aligned}$$