

本日よりこと

① 積分法

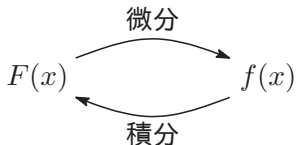
- 原始関数と不定積分

積分法

初めに

[積分とは何か]

微分と逆の演算



[目的]

1. 微分方程式を解くこと。(不定積分)
2. 面積・体積・質量の計算。道のりの計算(定積分)

(逆に 密度の計算 速度の計算は微分法であった)

積分法

原始関数

原始関数の定義

$$F(x) \text{ が } f(x) \text{ の原始関数} \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

[例]

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^3 + 1) = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^3 - 5) = 3x^2, \dots$$

であるから $x^3, x^3 + 1, x^3 - 5, \dots$ は $3x^2$ の原始関数である。

積分法

原始関数はどれだけあるか

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ で表すと、そのほかの原始関数 $G(x)$ は適当な定数 C を用いて $F(x) + C$ で表される。

[確かめ]

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

であるが、

「ある区間で導関数の値が常に $0 \Leftrightarrow$ 関数は定数関数」(定理 5.9)

だから $F(x) - G(x)$ は定数関数となる。

積分法

不定積分

不定積分の定義

$f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とし, C を任意の定数とすると, $F(x) + C$ を $f(x)$ の不定積分とよび

$$\int f(x) dx$$

で表す. 定数 C を積分定数という. 不定積分を求めることを $f(x)$ を積分するという.

まとめると

微分と不定積分の関係

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \iff \int f(x) dx = F(x) + C$$

無数の原始関数を象徴的に1つの式で表したものと思ってほしい。

積分法

主な関数の不定積分

$$(i) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$(ii) \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

$$(iii) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(iv) \int \sin x dx = -\cos x + C = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$(v) \int \cos x dx = \sin x + C = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

今後積分定数 C は省略することにする。

積分法

主な関数の不定積分

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx}x^2 = x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{2} = x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{2} + C = \int x dx$$

$$\Leftrightarrow d\left(\frac{x^2}{2}\right) = x dx$$

$$\Downarrow$$

$$\Leftrightarrow \int d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \int x dx$$

積分法

主な関数の不定積分

[(i) の確かめ] $a \neq 0$ とする。 $a - 1 = \alpha$ とおくと $a = \alpha + 1$

$$\frac{d}{dx} x^a = a x^{a-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{a} \frac{d}{dx} x^{a-1} = x^{a-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x^a}{a} = x^{a-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^a}{a} + C = \int x^{a-1} dx$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \int x^\alpha dx$$

ただし $\alpha \neq -1$

積分法

主な関数の不定積分

[(ii) の確かめ] $\alpha = -1$ のときは $x^{-1} = \frac{1}{x}$ であるが特別あつかい。

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \log |x| + C = \int \frac{1}{x} dx$$

[(iv) の確かめ]

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

\Downarrow

$$\frac{d}{dx} \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \sin x \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + C = \int \sin x dx$$

積分法

不定積分の性質：線形性

不定積分の性質：線形性

$$(i) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(ii) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ は定数})$$

積分法

不定積分の性質：線形性

[(i) の確かめ]

$$\int f(x) dx = F(x) + C_1 \text{とおく} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

$$\int g(x) dx = G(x) + C_2 \text{とおく} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} G(x) = g(x)$$

↓

$$\frac{d}{dx} F(x) + \frac{d}{dx} G(x) = f(x) + g(x)$$

∥

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &\Leftarrow \frac{d}{dx} (F(x) + G(x)) = f(x) + g(x) \\ &= F(x) + G(x) + C_3 \end{aligned}$$