建設基礎数学B 第8回小テスト　2023. 11. 24	学生番号	氏名		

1. 次の不定積分, 定積分を求めよ.

(1) $\int_{-1}^{2}(3x+2)^3\,dx$

(Step1). 原始関数を求めるために不定積分する.

$$\int (3x+2)^3\,dx = \int t^3\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\times\frac{t^4}{4}$$

$3x+2=t$ とおくと $3=\frac{dt}{dx}$. すなわち $dx=\frac{dt}{3}$. だから

$$=\frac{t^4}{12}=\frac{1}{12}(3x+2)^4$$

(Step2). $\int_{-1}^{2}(3x+2)^3\,dx=\left[\frac{1}{12}(3x+2)^4\right]_{-1}^{2}$

$$=\frac{1}{12}\{(3\times2+2)^4-(3\times(-1)+2)^4\}$$

$$=\frac{1}{12}\{4096-1\}=\frac{1365}{4}$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$

(Step1) $\int \cos 2x\,dx$ (※)

$2x=t$ とおくと $2=\frac{dt}{dx}$ すなわち $dx=\frac{dt}{2}$ とおく

$$(※)=\int \cos t\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\sin t$$

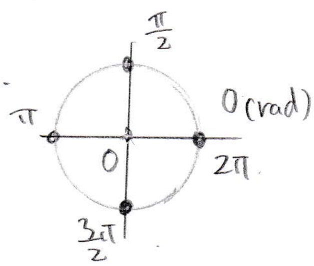
$$=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

(Step2).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\{\underbrace{\sin\pi}_{0}-\underbrace{\sin 0}_{0}\}$$

$$=0.$$



$\sin 0=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\sin\pi=0$, $\sin\frac{3}{2}\pi=-1$

$\cos 0=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\cos\pi=-1$, $\cos\frac{3}{2}\pi=0$

に注意?

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$　(2)より $\cos 2x=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'$

だから部分積分法により

$$\int x\cos 2x\,dx=\int x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx.$$

$$=x\times\frac{1}{2}\sin 2x-\int(x)'\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$

$$=\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\underbrace{\int\sin 2x\,dx}_{=-\frac{1}{2}\cos 2x}$$

(2)と同様の方法で

$$=\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x\,dx=\left[\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}\underbrace{\sin\pi}_{0}+\frac{1}{4}\underbrace{\cos\pi}_{-1}\right)-\left(0+\frac{1}{4}\underbrace{\cos 0}_{1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos 2x\,dx$ (※)

$$I=\int\sin x\cos 2x\,dx=\int\sin x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx$$

$$=\sin x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)-\int\cos x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\cos x\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\cos x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos x\cos 2x-\frac{1}{4}\int(-\sin x)\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos x\cos 2x+\frac{1}{4}I.$$

これをといて　$I=\frac{2}{3}\sin x\sin 2x+\frac{1}{3}\cos x\cos 2x$

だから

$$(※)=\left[\frac{2}{3}\sin x\sin 2x+\frac{1}{3}\cos x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}.$$

$\sin x\cos 2x=\frac{1}{2}\{\sin 3x+\underbrace{\sin(-x)}_{-\sin x}\}$

を用いてもよい。

(積を和になおす公式)