

## 建設基礎数学 B 第 14 回問題 解答

問題 1.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  とするとき,  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$ ,  $f_{xx}(x, y)$ ,  $f_{xy}(x, y)$ ,  $f_{yy}(x, y)$  を計算せよ。

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{極座標を使うと} = \cos \theta),$$

$$f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{極座標を使うと} = \sin \theta)$$

は第 11 回のスライドを見てください。

$$f_{xx}(x, y) = (f_x(x, y))_x = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_x$$

商の微分法により

$$= \frac{(x)_x \sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot (\sqrt{x^2 + y^2})_x}{x^2 + y^2}$$

$(x)_x = 1$  と前問の結果より

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{x^2 + y^2}$$

分母分子に  $\sqrt{x^2 + y^2}$  をかけて

$$= \frac{(x^2 + y^2) - x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(r \sin \theta)^2}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin^2 \theta}{r}$$

または

$$f_{xx} = (\cos \theta)_x$$

から出発して合成関数の微分法により

$$= (\cos \theta)_\theta \theta_x$$

ここで  $(\cos \theta)_\theta = -\sin \theta$  と第 5 回の結果  $\theta_x = \frac{-\sin \theta}{r}$  により

$$= -\sin \theta \frac{-\sin \theta}{r} = \frac{\sin^2 \theta}{r}.$$

でもよい。

$$f_{xy}(x, y) = (f_x(x, y))_y = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_y$$

商の微分法により

$$= \frac{(x)_y \sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)_y}{x^2 + y^2}$$

$(x)_y = 0$  と前問の結果より

$$= \frac{-x \cdot \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-r^2 \sin \theta \cos \theta}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\sin \theta \cos \theta}{r}$$

または

$$f_{xy} = (\cos \theta)_y$$

から出発して合成関数の微分法により

$$= (\cos \theta)_\theta \theta_y$$

ここで  $(\cos \theta)_\theta = -\sin \theta$  と第5回の結果  $\theta_y = \frac{\cos \theta}{r}$  により

$$= -\sin \theta \frac{\cos \theta}{r} = -\frac{\sin \theta \cos \theta}{r}.$$

でもよい.

$$f_{yy}(x, y) = (f_y(x, y))_y = \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_y$$

商の微分法により

$$= \frac{(y)_y \sqrt{x^2 + y^2} - y \cdot \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)_y}{x^2 + y^2}$$

$(y)_y = 1$  と前問の結果より

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \cdot \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{x^2 + y^2}$$

分母分子に  $\sqrt{x^2 + y^2}$  をかけて

$$= \frac{(x^2 + y^2) - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(r \cos \theta)^2}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos^2 \theta}{r}$$

または

$$f_{yy} = (\sin \theta)_y$$

から出発して合成関数の微分法により

$$= (\sin \theta)_\theta \theta_y$$

ここで  $(\sin \theta)_\theta = \cos \theta$  と第 5 回の結果  $\theta_y = \frac{\cos \theta}{r}$  により

$$= \cos \theta \frac{\cos \theta}{r} = \frac{\cos^2 \theta}{r}.$$

でもよい.

$$f_{xx}(x, y) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f_{yy}(x, y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

を比べると,  $x, y$  を入れ替えたものになっている。どうしてそうなるか説明して見よ。

**問題 2.** 次の関数の極値を求め, 極値の近くでグラフを書いて見よ.

$$(1) f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 2y$$

(step1) 必要条件をみたす  $(a, b)$  をさがす.

$$f_x(x, y) = 2x + 2y + 4, \quad f_y(x, y) = 2x + 4y + 2$$

だから必要条件は

$$\begin{cases} f_x(a, b) = 2a + 2b + 4 = 0 \\ f_y(a, b) = 2a + 4b + 2 = 0 \end{cases}$$

である. これをみたす  $(a, b)$  は  $(-3, 1)$  であり, この点以外では極値をとらない.

(step2)  $f(x, y)$  が  $(-3, 1)$  で極値をとるための十分条件を満たしているか確かめる.

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 4$$

だから  $(-3, 1)$  では

$$f_{xx}(-3, 1) = 2 > 0,$$

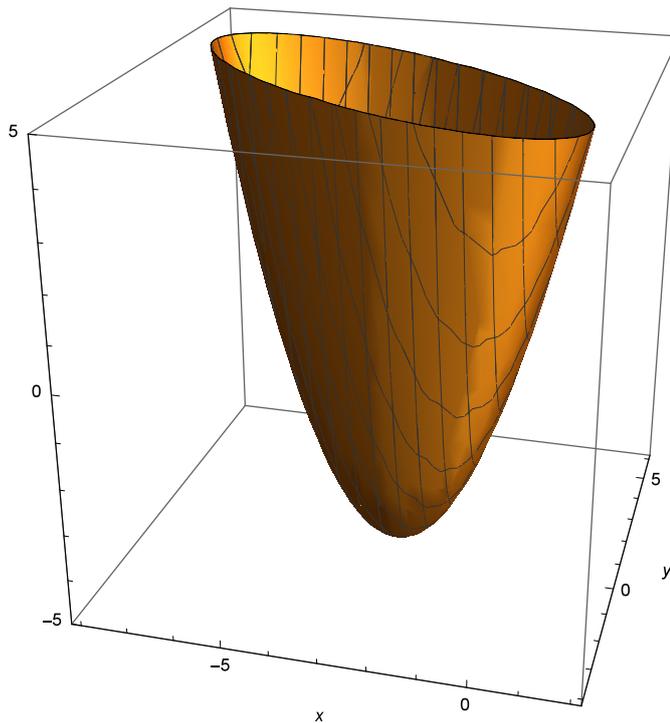
$$\begin{vmatrix} f_{xx}(-3, 1) & f_{xy}(-3, 1) \\ f_{xy}(-3, 1) & f_{yy}(-3, 1) \end{vmatrix} = f_{xx}(-3, 1) f_{yy}(-3, 1) - (f_{xy}(-3, 1))^2 = 4 > 0$$

だから定理 8.10 により極小となる.

極小値は  $f(-3, 1) = -5$ .

図とコマンドは以下の通り:

```
g = Plot3D[x^2 + 2 x*y + 2*y^2 + 4 x + 2 y, {x, -8, 2}, {y, -4, 6},  
PlotRange -> {-5, 5}, ClippingStyle -> None, BoxRatios -> {1, 1, 1},  
AxesLabel -> Automatic]
```



$$(2) f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$$

(step1) 必要条件をみたす  $(a, b)$  をさがす.

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 6y, f_y(x, y) = 3y^2 - 6x$$

だから必要条件は

$$\begin{cases} f_x(a, b) = 3a^2 - 6b = 0 \cdots \textcircled{1} \\ f_y(a, b) = 3b^2 - 6a = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

である.

$$\textcircled{1} \text{より } b = \frac{1}{2}a^2$$

$\textcircled{2}$ へ代入して

$$\frac{3}{4}a^4 - 6a = 0$$

$$a(a^3 - 8) = 0$$

$$a(a - 2)(a^2 + 2a + 4) = 0$$

$a^2 + 2a + 4$  は常に正だから

$$a = 0 \text{ または } a = 2,$$

$$a = 0 \text{ のとき } b = 0$$

$$a = 2 \text{ のとき } b = 2$$

だから必要条件を満たす  $(a, b)$  は  $(0, 0)$  と  $(2, 2)$  である. この他の点では極値をとらない.

(step2) 次にこれらの点では極値の十分条件が満たされるか判定する.

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{xy}(x, y) = -6, \quad f_{yy}(x, y) = 6y$$

だから

(i)  $(x, y) = (0, 0)$  のとき

$$f_{xx}(0, 0) f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = -(-6)^2 < 0$$

だから  $(0, 0)$  では, 極値をとらない. 峠点となる.

(ii)  $(x, y) = (2, 2)$  のとき

$$f_{xx}(2, 2) f_{yy}(2, 2) - (f_{xy}(2, 2))^2 = 12 \times 12 - (-6)^2 > 0$$

$$f_{xx}(2, 2) = 12 > 0$$

だから  $(2, 2)$  で極小となる. 極小値は  $f(2, 2) = -8$ .

図とコマンドは以下の通り:

```
Plot3D[x^3 + y^3 - 6 x*y, {x, -2, 4}, {y, -2, 4},  
PlotRange -> {-8, 4}, ClippingStyle -> None,  
AxesLabel -> Automatic]
```

