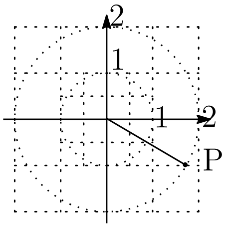
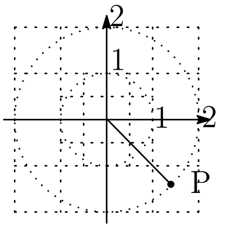
建設基礎数学 B 第 13 回問題 解答

問題 1. (1) 直角座標 $(\sqrt{3}, -1)$ の点 P を図示し, その極座標を求めよ.



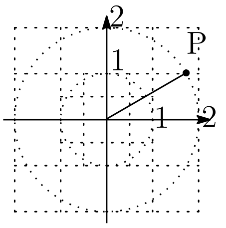
$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{6}$ だから極座標は $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 直角座標 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ の点 P を図示し, その極座標を求めよ.



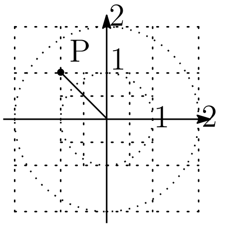
$r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{4}$ だから極座標は $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$.

(3) 極座標 $(2, \frac{\pi}{6})$ の点 P を図示し, その直角座標を求めよ.



$x = 2\cos\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3} \quad y = 2\sin\dfrac{\pi}{6} = 1$ だから直角座標は $(\sqrt{3}, 1)$.

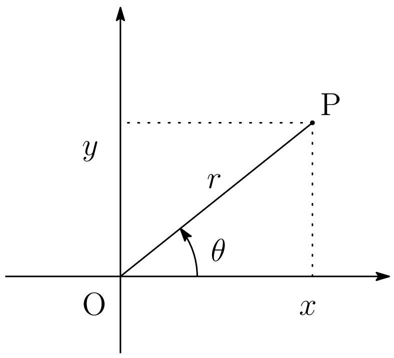
(4) 極座標 $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ の点 P を図示し, その直角座標を求めよ.



$x = \sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{4} = -1 \quad y = \sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{4} = 1$ だから直角座標は $(-1, 1)$.

問題 2 極座標が (r,θ) である点の直角座標を (x,y) とする.

(1) x, y を r, θ を用いて表せ.



図より $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

(2) このとき次の偏導関数を計算せよ.

$x_r = (r\cos\theta)_r = (r)_r\cos\theta = \cos\theta$

$x_\theta = (r\cos\theta)_\theta = r(\cos\theta)_\theta = -r\sin\theta.$

$y_r = (r\sin\theta)_r = (r)_r\sin\theta = \sin\theta$

$y_\theta = (r\sin\theta)_\theta = r(\sin\theta)_\theta = r\cos\theta.$

問題 3. 直角座標が (x,y) である点の極座標を (r,θ) とする.

(1) r を x, y を用いて表せ.

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ である.

(2) r は x, y の 2 変数関数であるが x に関する偏導関数 r_x を求めよ.

$$r_x = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_x$$

$x^2+y^2 = t$ とおくと $r = \sqrt{t}$ だから合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} &= \left(\sqrt{t}\right)_t \times t_x = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (x^2+y^2)_x = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

r, θ で書き直すと

$$= \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

(3) r_y を計算せよ.

$$r_y = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_y$$

$x^2+y^2=t$ とおくと $r=\sqrt{t}$ だから合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned}
&= \left(\sqrt{t}\right)_t \times t_y = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (x^2+y^2)_y = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times 2y \\
&= \frac{y}{\sqrt{t}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

r, θ で書き直すと

$$= \frac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta$$

問題 4. 直角座標が (x, y) である点の極座標を (r, θ) とする.

(1) $\sin\theta$, $\cos\theta$ を x, y を用いて表せ.

$$x = r\cos\theta \text{ だから } \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y = r\sin\theta \text{ だから } \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(2) (1) の結果を利用して $(\sin\theta)_x$ を計算せよ.

$$(\sin\theta)_x = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_x$$

商の微分法により

$$= \frac{(y)_x\sqrt{x^2+y^2} - y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_x}{x^2+y^2}$$

$(y)_x = 0$ と前問の結果 より

$$\begin{aligned}
&= \frac{-y\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdots ①
\end{aligned}$$

r, θ で書き直すと

$$= \frac{-r^2 \sin\theta\cos\theta}{r^3} = \frac{-\sin\theta\cos\theta}{r}$$

(3) $(\sin\theta)_x = (\sin\theta)_\theta \times \theta_x$ と (2) の結果を利用して θ_x を計算せよ.

θ は x, y の 2 変数関数となるだろうから合成関数の微分法を使って

$$(\sin\theta)_x = (\sin\theta)_\theta \times \theta_x = \cos\theta \times \theta_x$$

(1) より

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \theta_x \cdots ②$$

①=② だから

$$\theta_x = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\theta}{r}$$

(4) θ_y を計算せよ.

$$(\sin\theta)_y = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_y$$

商の微分法により

$$= \frac{(y)_y\sqrt{x^2+y^2} - y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_y}{x^2+y^2}$$

$(y)_y = 1$ と前問の結果 より

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2}$$

分母分子に $\sqrt{x^2+y^2}$ をかけて

$$= \frac{x^2+y^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdots ①$$

r, θ で書き直すと

$$= \frac{r^2\cos^2\theta}{r^3} = \frac{\cos^2\theta}{r}$$

一方 θ は x, y の 2 変数関数となるだろうから合成関数の微分法を使って

$$(\sin\theta)_y = (\sin\theta)_\theta \times \theta_y = \cos\theta \times \theta_x$$

(1) より

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \theta_y \cdots ②$$

①=② だから

$$\theta_y = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

[余談] 問題 2，3，4 の結果をまとめると

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるということが出てくる。このことを確かめよ。またどうしてこうなるのか考えよ.