

建設基礎数学 B 第 12 回問題 解答

問題 1. (1) $f(x, y) = e^{3x-2y}$ のとき,

$3x - 2y = t$ とおくと $z = e^{3x-2y}$ は $z = e^t$ と $t = 3x - 2y$ の合成関数になるから合成関数の微分法を使って

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (e^t)_t \times t_x \\ &= (e^t)_t \times (3x - 2y)_x \\ &= e^t \times 3 = 3e^{3x-2y}. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= (e^t)_t \times t_y \\ &= (e^t)_t \times (3x - 2y)_y \\ &= e^t \times (-2) = -2e^{3x-2y}. \end{aligned}$$

(2) $f(x, y) = \sin(xy)$

$xy = t$ とおいて合成関数の微分法を使う

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (\sin t)_t \times t_x \\ &= (\sin t)_t \times (xy)_x \\ &= \cos t \times y = y \cos(xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= (\sin t)_t \times t_y \\ &= (\sin t)_t \times (xy)_y \\ &= \cos t \times x = x \cos(xy) \end{aligned}$$

(3) $f(x, y) = e^{3x-2y} \sin(xy)$

ふたつの関数 e^{3x-2y} と $\sin(xy)$ の積とみて積の微分法を使う.

$$f_x(x, y) = (e^{3x-2y})_x \sin(xy) + e^{3x-2y} (\sin(xy))_x$$

(1), (2) により

$$\begin{aligned} &= 3e^{3x-2y} \sin(xy) + ye^{3x-2y} \cos(xy) \\ &= e^{3x-2y} (3 \sin(xy) + y \cos(xy)) \end{aligned}$$

同様に

$$f_y(x, y) = (e^{3x-2y})_y \sin(xy) + e^{3x-2y} (\sin(xy))_y$$

(1), (2) により

$$\begin{aligned} &= -2e^{3x-2y} \sin(xy) + xe^{3x-2y} \cos(xy) \\ &= e^{3x-2y}(-2 \sin(xy) + x \cos(xy)) \end{aligned}$$

(4) $f(x, y) = x \cos y - \sin x \cos y + \sin(xy)$.

$xy = t$ において

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (x \cos y)_x - (\sin x \cos y)_x + (\sin(xy))_x \\ &= (x)_x \cos y - (\sin x)_x \cos y + (\sin t)_t \times t_x \\ &= \cos y - \cos x \cos y + \cos t \times y \\ &= \cos y - \cos x \cos y + y \cos(xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= (x \cos y)_y - (\sin x \cos y)_y + (\sin(xy))_y \\ &= x(\cos y)_y - \sin x(\cos y)_y + (\sin t)_t \times t_y \\ &= -x \sin y + \sin x \sin y + \cos t \times x \\ &= -x \sin y + \sin x \sin y + x \cos(xy) \end{aligned}$$

問題 2. (1) 略 (第9回のスライドを参考にせよ)

(2) $z = f(x, y)$ のグラフは空間の点 $(x, y, f(x, y))$ を集めた集合である。だからグラフ上の $x = a, y = b$ であるような点の座標は

$$(a, b, f(a, b)) = (a, b, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

である。

(3) $x^2 + y^2 < R^2$ のとき $R^2 - x^2 - y^2 = t$ とおくと $t > 0$ 。だから \sqrt{t} は微分可能。ここで合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right)_x = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_x \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times t_x = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times (R^2 - x^2 - y^2)_x \\ &= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right)_y = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_y \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times t_y = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times (R^2 - x^2 - y^2)_y \\ &= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

(4) したがって

$$f_x(a, b) = \frac{-a}{\sqrt{R^2 - a^2 - b^2}}, \quad f_y(a, b) = \frac{-b}{\sqrt{R^2 - a^2 - b^2}}$$

である. 接平面上の点を (x, y, z) とおき, 上の結果を $z = f(x, y)$ の $A(a, b, f(a, b))$ における接平面の方程式

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

に代入すると

$$z - \sqrt{R^2 - a^2 - b^2} = \frac{-a(x - a)}{\sqrt{R^2 - a^2 - b^2}} + \frac{-b(y - b)}{\sqrt{R^2 - a^2 - b^2}}$$

となる. これが球面の接平面の方程式である。

さらに $\sqrt{R^2 - a^2 - b^2} = c > 0$ とおき整理すると $a^2 + b^2 + c^2 = R^2$ であるから,

$$ax + by + cz = R^2$$

となり大変簡単になる. これが何を意味するか考えよ。

また, 法線ベクトルは

$$(f_x(a, b), f_y(a, b), -1) = \left(-\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}, -1 \right)$$

であるが, これは中心と接点を結ぶベクトル (a, b, c) に平行である. これが何を意味するかも考えよ。