建設基礎数学 B 第 11 回問題 解答

問題 1. (1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ のとき,

$$f_x(x, y) = (x^3 + y^3 - 3xy)_x$$

偏微分計算 $()_x$ は $+, -$ で分けてよいから

$$= (x^3)_x + (y^3)_x - (3xy)_x$$

y^3, $3y$ は定数と見なすから $()_x$ の外に出してよいから

$$\begin{aligned} &= (x^3)_x + y^3(1)_x - 3y(x)_x = 3x^2 + y^3 \cdot 0 - 3y \cdot 1 \\ &= 3x^2 + 0 - 3y = 3x^2 - 3y \end{aligned}$$

同様に

$$f_y(x, y) = (x^3 + y^3 - 3xy)_y$$

偏微分計算 $()_y$ は $+, -$ で分けてよいから

$$= (x^3)_y + (y^3)_y - (3xy)_y$$

x^3, $3x$ は定数と見なすから $()_y$ の外に出してよいから

$$\begin{aligned} &= x^3(1)_y + (y^3)_y - 3x(y)_y = x^3 \cdot 0 + 3y^2 - 3x \cdot 1 \\ &= 0 + 3y^2 - 3x = 3y^2 - 3x \end{aligned}$$

(2) $f(x, y) = \cos(3x - 2y)$

$\cos(3x - 2y)$ は $\cos \times (3x - 2y)$ ではないから $\{\cos(3x - 2y)\}_x$ を

$$\cos\{(3x - 2y)_x\}, \quad -\sin\{(3x - 2y)_x\}$$

などとしてはならない. sin の現れる関数を微分するときは $(\sin t)_t = \cos t$ を使わなくてはならない.

詳しく言うと, $3x - 2y = t$ とおくと $z = \cos(3x - 2y)$ は $z = \cos t$ と $t = 3x - 2y$ の合成関数になるから合成関数の微分法を使って

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (\cos t)_t \times t_x \\ &= (\cos t)_t \times (3x - 2y)_x \\ &= -\sin t \times 3 = -3\sin(3x - 2y). \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (\cos t)_t \times t_y \\ &= (\cos t)_t \times (3x-2y)_y \\ &= -\sin t \times (-2) = 2\sin(3x-2y) \end{aligned}$$

(3) $f(x,y) = e^{xy}$

$xy = t$ とおいて合成関数の微分法を使う

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (e^t)_t \times t_x \\ &= (e^t)_t \times (xy)_x \\ &= e^t \times y = ye^{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (e^t)_t \times t_y \\ &= (e^t)_t \times (xy)_y \\ &= e^t \times x = xe^{xy} \end{aligned}$$

(4) $f(x,y) = e^{xy}\cos(3x-2y)$

ふたつの関数 e^{xy} と $\cos(3x-2y)$ の積とみて積の微分法を使う.

$$f_x(x,y) = (e^{xy})_x \cos(3x-2y) + e^{xy}\left(\cos(3x-2y)\right)_x$$

(2), (3) により

$$\begin{aligned} &= ye^{xy}\cos(3x-2y) - 3e^{xy}\sin(3x-2y) \\ &= e^{xy}(y\cos(3x-2y) - 3\sin(3x-2y)) \end{aligned}$$

同様に

$$f_y(x,y) = (e^{xy})_y \cos(3x-2y) + e^{xy}\left(\cos(3x-2y)\right)_y$$

(2), (3) により

$$\begin{aligned} &= xe^{xy}\cos(3x-2y) + 2e^{xy}\sin(3x-2y) \\ &= e^{xy}(x\cos(3x-2y) + 2\sin(3x-2y)) \end{aligned}$$

(5) $f(x,y) = 3x+y-2$

$(y)_x = 0, (3x)_y = 0$ に注意して

$f_x(x,y) = (3x+y-2)_x = (3x)_x + (y)_x - (2)_x = 3+0-0 = 3$

$f_y(x,y) = (3x+y-2)_y = (3x)_y + (y)_y - (2)_y = 0+1-0 = 1$

(6) $f(x,y) = (3x+y-2)^9$

$z = f(x,y), t = 3x+y-2$ とおくと,

$z = f(x,y)$ は $z = t^9,\ t = 3x+y-2$

の合成関数であるから, 合成関数の微分法により

$f_x(x,y) = z_x = z_t \times t_x = (t^9)_t \times (3x+y-2)_x = 9t^8 \times 3 = 27(3x+y-2)^8$

$f_y(x,y) = z_y = z_t \times t_y = (t^9)_t \times (3x+y-2)_y = 9t^8 \times 1 = 9(3x+y-2)^8$

(7) $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2$

$(3xy)_x = 3y, (3xy)_y = 3x,$

$(2y^2)_x = 0, (2x^2)_y = 0$ に注意して

$f_x(x,y) = (2x^2 - 3xy + 2y^2)_x = (2x^2)_x - (3xy)_x + (2y^2)_x = 4x - 3y$

$f_y(x,y) = (2x^2 - 3xy + 2y^2)_y = (2x^2)_y - (3xy)_y + (2y^2)_y = -3x + 4y$

(8) $f(x,y) = \sqrt{2x^2 - 3xy + 2y^2}$

$z = f(x,y), t = 2x^2 - 3xy + 2y^2$ とおくと,

$z = f(x,y)$ は $z = \sqrt{t},\ t = 2x^2 - 3xy + 2y^2$

の合成関数であるから, 合成関数の微分法により

$$f_x(x,y) = z_x = z_t \times t_x = (\sqrt{t})_t(2x^2 - 3xy + 2y^2)_x = \tfrac{1}{2\sqrt{t}} \times (4x - 3y)$$
$$= \frac{4x-3y}{2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}}$$

$$f_y(x,y) = z_y = z_t \times t_y = (\sqrt{t})_t(2x^2 - 3xy + 2y^2)_y = \tfrac{1}{2\sqrt{t}} \times (-3x + 4y)$$
$$= \frac{-3x+4y}{2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}}$$