

建設基礎数学 B 第 9 回問題解答

問題 1. (1) ベクトル $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$ に垂直で点 $A(1, 1, 0)$ を通る平面 K の方程式を書け。

点 $A(a, b, c)$ を通り, ベクトル $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, -1)$ と垂直な平面 K の方程式は

$$z - c = \alpha(x - a) + \beta(y - b)$$

だからこれに $\alpha = 1, \beta = 2, a = 1, b = 1, c = 0$ を代入して

$$z - 0 = 1(x - 1) + 2(y - 1)$$

整理して

$$z = x + 2y - 3 \cdots (*)$$

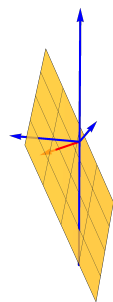
(2) 平面 K と z 軸の交点を求めよ。

交点の座標を $P(x, y, z)$ とすると

$$\begin{cases} z = x + 2y - 3, & (P \text{ が } K \text{ 上にあるから}) \\ x = 0, y = 0, & (P \text{ が } z \text{ 軸上にあるから}) \end{cases}$$

を解いて $x = 0, y = 0, z = -3$, したがって P の座標は $(0, 0, -3)$.

(3) 平面 K と原点との距離を求めよ。



K に原点から垂線を引いたときの K との交点を $H(x, y, z)$ とおく。これが原点から最短距離にある点である。なぜなら、 K 上の任意の点を P とするとき、 $OH \perp HP$ となるから三平方の定理により

$$OP^2 = OH^2 + HP^2 \geq OH^2$$

となるからである。

$\vec{OH} // \mathbf{n}$ だから $\vec{OH} = t\mathbf{n}$ すなわち $(x, y, z) = (t, 2t, -t)$ となる実数 t がある。
したがって $x = t, y = 2t, z = -t$ 。H は (1) の平面上にあるからこれを (*) に代入して $t = \frac{1}{2}$ であることがわかる。したがって

$$OH = |\vec{OH}| = |\frac{1}{2}\mathbf{n}| = \frac{1}{2}|(1, 2, -1)| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

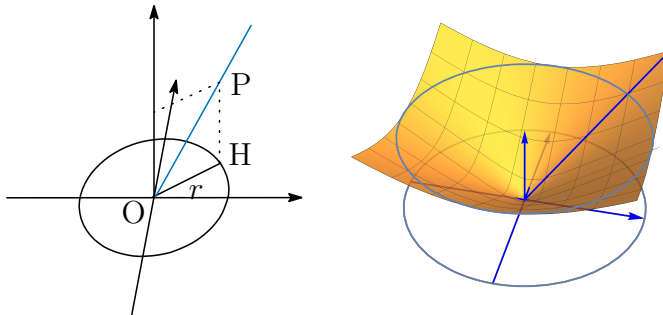
問題 2. (1) 2変数関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ のグラフが逆さにした円錐の表面となることを説明せよ。

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおく。これは原点 O と xy 平面上の点 $A(x, y)$ との距離である。

$f(x, y) = r$ だから関数 $f(x, y)$ の値は点 (x, y) と原点との距離 r だけで決まることになる。だからこの関数のグラフは z 軸を中心にした回転体となる。

いま, $f(x, y) = z$ とおくと $z = r$ であるから, 原点 O, 点 $H(x, y, 0)$, 点 $P(x, y, z)$ は直角二等辺三角形を作り, 角 $\angle HOP$ は常に $\frac{\pi}{4}$ である。だから P は原点をとおり傾き 1 の直線上にある。

$z = f(x, y)$ のグラフはこの直線を z 軸を中心に戻した回転体となる。したがって円錐面である。



(2) この関数のグラフの概形を Mathematica で書いてみよ。