建設基礎数学 B 第 7 回解答

1.

各自で

2. (1) 放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=x+1$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(step1)$y=-x^2+2x+3$ のグラフを書く.

x	-1	0	1	2	3	4
y	0	3	4	3	0	-5

からだいたいの図はかけるが

$-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$ だから $x=-1,\ 3$ のとき $y=0$ となる.

$-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$ だから主軸は $x=1$，頂点は $(1,\ 4)$

を使ってもよい.

(step2) $y=x+1$ のグラフを書く.

これは 1 次関数だからグラフは直線であり，傾きは 1，$x=0$ のとき $y=1$ だから $(0,\ 1)$ を通る.

(step3) $y=-x^2+2x+3$ と $y=x+1$ の交点の座標を求める.

交点の座標は連立方程式

$$\begin{cases} y = -x^2+2x+3 & \cdots ① \\ y = x+1 & \cdots ② \end{cases}$$

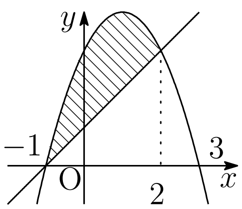
の解である.

①−②: $0=-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$

だから $x=-1,\ 2$

②より $x=-1$ のとき $y=0$，$x=2$ のとき $y=3$

だから交点は $(-1,0)$ と $(2,\ 3)$



(step4) 囲まれる部分の面積 S を求める.

$-1 \leqq x \leqq 2$ のとき $(x,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線で図形を切ったときの切り口の長さ $\ell(x)$ は, この直線と①の交点の y 座標からこの直線と②の交点の y 座標を引いたものであるから

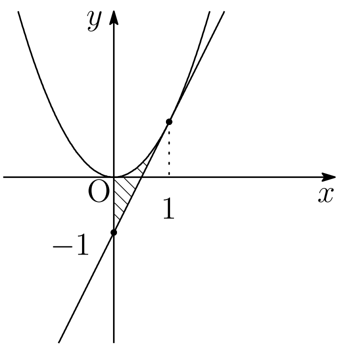
$\ell(x) = (x+1) - (-x^2+2x+3) = x^2 - x - 2.$

だから

$$S = \int_{-1}^{2} (-x^2+x+2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \times 2 \right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2 + 2(-1) \right) = \frac{9}{2}$$

3. (1) $f(x) = x^2$ とおくと $f'(x) = 2x$, したがって $f'(1) = 2$ だから 点 $(1,1)$ における接線の傾きは 2 である. 接線は 点 $(1,1)$ を通り傾き 2 の直線であるから方程式は $y - 1 = 2(x-1)$, 即ち $y = 2x - 1$ である.



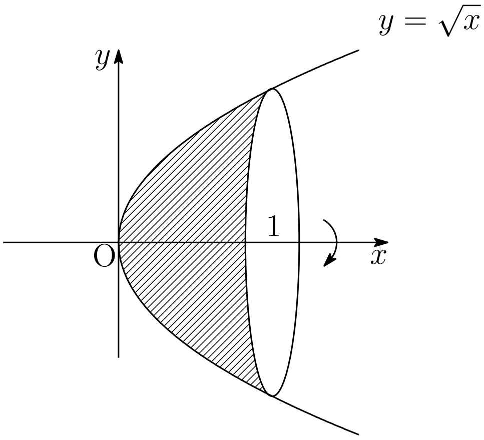
(2) 囲まれる図形の面積は

$$S = \int_0^1 (x^2 - (2x-1))\,dx = \left[\frac{x^2}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

4 $y = \sqrt{x}$ のグラフ, $x = 0$, $x = 1$ と x 軸で囲まれる図形を x 軸の周りで 1 回転してできる図形の体積を求めよ.

この立体を 点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸と垂直な平面で切った切り口は半径 $\sqrt{x}$ の円であり, 面積は πx であるから体積は

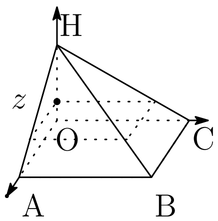
$$V = \int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2 dx = \left[\pi \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$



5. 図のような空間図形の体積を求めよ。ただし

A$(a,0,0)$, B$(a,b,0)$, C$(0,b,0)$, H$(0,0,h)$

とする。



これは OABC を底面とする高さ h の錐体である。底面積 S は $S=ab$, 高さ z で xy 平面に平行に切った切り口の面積を $S(z)$ とすると底面と切り口は相似で

相似比 $=h:(h-z)$, 面積比 $=h^2:(h-z)^2$

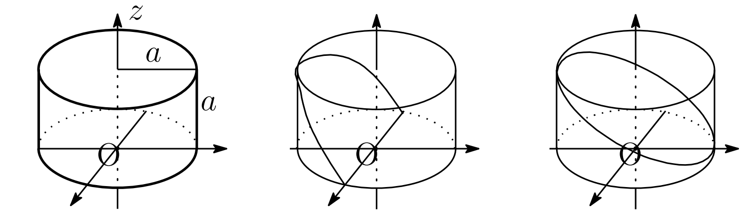
だから

$S(z)=\dfrac{(h-z)^2}{h^2}S$

体積はこれを z について積分して

$$\int_0^h \frac{(h-z)^2}{h^2}S\,dz = S\int_0^h \left(1-2\frac{z}{h}+\frac{z^2}{h^2}\right)dz = S\left[z-\frac{z^2}{h}+\frac{z^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}abh$$

6.



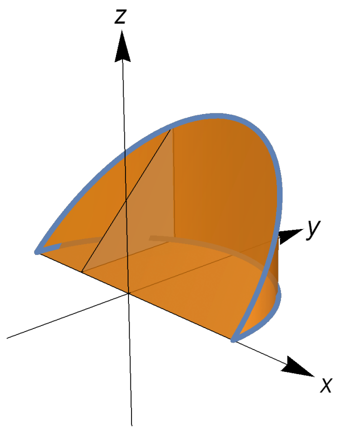
(a) (b) (c)

横から見たところ →

図の立体 (a), (b), (c) の体積を求めよ。

(a): πa^3

(b):



図形を x 軸に垂直な平面で切った切り口は図のような直角 2 等辺三角形である。この y 軸に平行な辺の長さは $\sqrt{a^2-x^2}$ だから三角形の面積は $\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)$。したがって体積は

$$V=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}a^3$$

(c) : 円柱の半分だから $\dfrac{1}{2}\pi a^3$