建設基礎数学 B 第 6 回解答

1. 次の定積分・広義積分を計算せよ。k は正の定数。

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-kx}\,dx$

$-kx = t$ とおくと $dx = -\dfrac{dt}{k}$ だから

$$\int e^{-kx}\,dx = \int e^t \left(-\frac{dt}{k}\right) = -\frac{1}{k}\int e^t\,dt = -\frac{1}{k}e^t = -\frac{1}{k}e^{-kx}$$

この結果より

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}\,dx = \left[-\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^{\infty} = \left(-\frac{1}{k}e^{-\infty}\right) - \left(-\frac{1}{k}e^0\right) = \frac{1}{k}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-kx}\,dx$

前問より

$$\int e^{-kx}\,dx = -\frac{1}{k}e^{-kx}$$

だから

$$\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right)' = e^{-kx}$$

広義積分の場合でも (もし積分が収束するならば) 部分積分法を使うことができる。

$$\int_0^{\infty} xe^{-kx}\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right)' \times x\,dx$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right) \times x\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right) \times 1\,dx$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right) \times x\right]_0^{\infty} - \left[\left(-\frac{1}{k}\right)^2 e^{-kx}\right]_0^{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{k}e^{-kx} \times x\right) - \left(-\frac{1}{k}e^0 \times 0\right) - \left(-\frac{1}{k^2}e^{-\infty}\right) + \left(\frac{1}{k^2}e^0\right)$$

$$= \frac{1}{k^2}$$

ここで $e^{-\infty} = 0,\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{kx}} = 0,\ k > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$ を使った。教科書 112 ページを見よ。

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

$x = -\dfrac{1}{2}$ で定義できないから広義積分であることに注意。

$x = -\frac{1}{2}$ のとき $t = 0,\ x = 4$ のとき $t = 9$

だから

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = \left[\sqrt{t}\right]_0^9 = \sqrt{9} - \sqrt{0} = 3$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$x^2 + 1 = t$ とおくと,

$$dx = \frac{dt}{2x},\ x = 0 \Rightarrow t = 1,\ x = 1 \Rightarrow t = 2$$

より

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^2 x\sqrt{t}\frac{dt}{2x} = \left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad (x = \tan t,\ 0 < t < \frac{\pi}{2}$ とおけ$)$

(6) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ だから

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1} x\right]_0^\infty = \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

または $x = \tan t$ とおいて

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t}, \frac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t, x = 0 \Rightarrow t = 0, x \to \infty \Rightarrow t \to \frac{\pi}{2}$$

に注意すると

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$$