建設基礎数学B
第3回解答

以下, 積分定数 C は省略する.

1. $S = \int e^x \sin x \, dx,\ C = \int e^x \cos x \, dx$ とおく。

(1) 部分積分により S を C で表せ。

$$\begin{aligned} S &= \int e^x \sin x \, dx = \int e^x (-\cos x)' \, dx \\ &= e^x(-\cos x) - \int (e^x)'(-\cos x) \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \\ &= -e^x \cos x + C. \end{aligned}$$

(2) 部分積分により C を S で表せ。

$$\begin{aligned} C &= \int e^x \cos x \, dx = \int e^x (\sin x)' \, dx \\ &= e^x(\sin x) - \int (e^x)'(\sin x) \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x \sin x - S. \end{aligned}$$

(3) S, C を x で表せ。

$$\begin{cases} S = -e^x \cos x + C, \\ C = e^x \sin x - S, \end{cases}$$

を解いて

$$S = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \quad C = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x).$$

2. (1) a を正の定数とする. $x = a \tan t$ によって積分変数を t に変換することにより $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ を計算せよ. (Hint. $\frac{1}{1 + \tan^2 t} = \cos^2 t$.)

$x = a \tan t$ の両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\cos^2 t}$$

$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ (三平方の定理) に注意して

$$= a(1+\tan^2 t).$$

この両辺に dt をかけると

$$dx = a(1+\tan^2 t)dt.$$

従って x を $a\tan t$ で置き換えると dx を $a(1+\tan^2 t)\,dt$ で置き換えなくてはならないので

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a(1+\tan^2 t)\,dt}{a^2(1+\tan^2 t)} = \int \frac{dt}{a} = \frac{t}{a}$$

ここで逆三角関数を使うと $\dfrac{x}{a} = \tan t \iff t = \tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ だから

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}.$$

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$ を計算せよ.

$\dfrac{x}{a} = t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{dt}{dx}\times\frac{d}{dt}\tan^{-1}t = \frac{1}{a}\times\frac{d}{dt}\tan^{-1}t\cdots(\star)$$

$y = \tan^{-1}t$ とおくと逆三角関数の定義により

$$y = \tan^{-1}t \iff t = \tan y,\quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

だから

$$\frac{dt}{dy} = \frac{d}{dy}\tan y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1+\tan^2 y = 1+t^2$$

逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dy}} = \frac{1}{1+t^2}$$

だから

$$\frac{d}{dt}\tan^{-1}t = \frac{1}{1+t^2}$$

$(\star)$ と合わせて

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a^2}\times\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{a^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2+x^2}$$

3. (1) 次の式を部分分数に分解せよ.

$$\frac{x+8}{x^2+x-6}$$

分母を因数分解すると

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

だからこの関数は

$$\frac{x+8}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}\quad (A\ B\ \text{は定数})$$

の形に変形される．これを部分分数分解という．この等式が x の恒等式になるように定数 A, B の値を決めよう．右辺を通分して足し算すると

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)}{(x-2)(x+3)}+\frac{B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

だから分子どうし比較して

$$x+8=(A+B)x+3A-2B$$

であればよい．

x の係数どうしを比較して $A+B=1$

定数項どうし比較して $3A-2B=8$

この連立方程式を解くと $A=2$, $B=-1$ だから

$$\frac{x+8}{x^2+x-6}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+3}$$

(2) $\displaystyle\int\frac{x+8}{x^2+x-6}\,dx$ を計算せよ．

(1) により

$$\int\frac{x+8}{x^2+x-6}\,dx=\int\frac{2}{x-2}\,dx-\int\frac{1}{x+3}\,dx$$
$$=2\log|x-2|-\log|x+3|$$

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-1}$ を計算せよ。

$\dfrac{1}{x^2-1}$ を部分分数に分解する。

分母を因数分解すると

$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

だからこの関数は

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\quad (A\ B\ \text{は定数})$$

の形に変形される．これを部分分数分解という．この等式が x の恒等式になるように定数 A, B の値を決めよう．右辺を通分して足し算すると

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+B)x+A-B}{x^2-1}$$

だから分子どうし比較して

$$1=(A+B)x+A-B$$

であればよい.

x の係数どうしを比較して $A+B=0$

定数項どうし比較して $A-B=1$

この連立方程式を解くと $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{2}$ だから

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

両辺を積分して

$$\int\frac{1}{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{}{x-1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log|x-1|-\log|x+1|\right)$$