

## 建設基礎数学B 第2回解答

以下, 積分定数  $C$  は省略する.

1.

$$(1) \int (2x - 3)^5 dx$$

$$2x - 3 = t \quad (*)$$

とおき, この両辺を  $x$  で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に  $\frac{dx}{2}$  を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \quad (**)$$

という等式が得られる. この(\*\*)から  $dx$  を  $\frac{1}{2} dt$  に置き換えればよいことが分かる. このおきかえにより

$$\int (2x - 3)^5 dx = \int t^5 \left( \frac{1}{2} dt \right) = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{1}{12} t^6$$

$t = 2x - 3$  だから

$$= \frac{1}{12} (2x - 3)^6.$$

(2)  $2x - 3 = t$  と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{12} (2x - 3)^6 \right) = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{12} t^6 \right) = 2 \frac{1}{12} 6t^5 = t^5 = (2x - 3)^5$$

これは (1) の検算である。

$$(3) \int \cos(2x - 3) dx$$

(1) と同じ変換で

$$2x - 3 = t \quad (*)$$

とおき,  $x$  で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, 両辺に  $\frac{dx}{2}$  を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \quad (**)$$

という等式が得られる. これらにより  $2x - 3$ ,  $dx$  をおきかえると,

$$\int \cos(2x - 3) dx = \int \cos t \left( \frac{1}{2} dt \right) = \frac{1}{2} \sin t$$

$t = 2x - 3$  だから

$$= \frac{1}{2} \sin(2x - 3)$$

(4)  $2x - 3 = t$  と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \sin(2x - 3) \right) = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sin t \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos t = \cos t = \cos(2x - 3)$$

これは (3) の検算である。

$$(5) \int e^{2x-3} dx$$

(1) と同じ変換で  $2x - 3$ ,  $dx$  をおきかえると,

$$\int e^{2x-3} dx = \int e^t \left( \frac{1}{2} dt \right) = \frac{1}{2} e^t$$

$t = 2x - 3$  だから

$$= \frac{1}{2} e^{2x-3}$$

(6)  $2x - 3 = t$  と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} e^{2x-3} \right) = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} e^t \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} e^t = e^t = e^{2x-3}$$

これは (5) の検算である。

$$2. (1) \int \sqrt{x} dx$$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  である. べき関数の積分法  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$  において

$\alpha = \frac{1}{2}$  とすると

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$  である. べき関数の積分法  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$  において  $\alpha = -\frac{1}{2}$  とすると

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} dx &= \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

(3)  $\int \sqrt{2x-3} dx$  を計算しよう.  $2x-3=t$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = 2$  だから  $dx = \frac{1}{2}dt$ . したがって置換積分法を使って

$$\int \sqrt{2x-3} dx = \int \sqrt{t} \frac{1}{2} dt$$

(1) により

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}}$$

$$(4) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$2x-3=t$  において合成関数の微分法を使う。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \times 2 \\ &= t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3} \end{aligned}$$

これは (3) の検算である。

(5)  $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx$  を計算しよう.  $2x-3=t$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = 2$  だから  $dx = \frac{1}{2}dt$ . したがって置換積分法を使って

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{2} dt$$

(2) により

$$= \frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3}$$

$$(6) \frac{d}{dx} (\sqrt{2x-3})$$

$2x-3=t$  において合成関数の微分法を使う。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( (2x-3)^{\frac{1}{2}} \right) &= \frac{d}{dt} \left( t^{\frac{1}{2}} \right) \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2 \\ &= t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} \end{aligned}$$

これは (5) の検算である。

3. (1)  $\int x\sqrt{x^2+1} dx$  を計算せよ. ( $x^2+1=t$  とおく)

$t=x^2+1$  とおき, この両辺を  $x$  で微分すると

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に  $\frac{dx}{2x}$  を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

という等式が得られる. このことから  $dx$  を  $\frac{1}{2x} dt$  に置き換えればよいことになる. (これは定理 6.3 (6.8) の置き換えと全く同じ置き換えである.)

この置き換えにより

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2+1} dx &= \int x\sqrt{t} \left( \frac{1}{2x} dt \right) = \int \sqrt{t} \left( \frac{1}{2} dt \right) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

$$(2) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$x^2+1=t$  において, 合成関数の微分法を使う。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \times 2x \\ &= x t^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

これは (1) の検算である。

(3)  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$  を計算せよ. ( $x^2+1=t$  とおく)

(1) と同じ置き換えにより

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{t}} \left( \frac{1}{2x} dt \right) = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left( \frac{1}{2} dt \right) = \frac{1}{2} 2t^{\frac{1}{2}} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1}.$$

(4)  $\frac{d}{dx} (\sqrt{x^2+1})$

$x^2+1=t$  において、合成関数の微分法を使う。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \right) &= \frac{d}{dt} \left( t^{\frac{1}{2}} \right) \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2x \\ &= x t^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

これは (3) の検算である。

4. (1)  $\int \frac{dx}{2x+1}$

$$2x+1=t \quad (*)$$

とおき、この両辺を  $x$  で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが、この両辺に  $\frac{dx}{2}$  を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \quad (**)$$

という等式が得られる。この(\*\*)から  $dx$  を  $\frac{1}{2} dt$  に置き換えればよいことが分かる。このおきかえにより

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \int \frac{1}{t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log |t|$$

$t = 2x+1$  だから

$$= \frac{1}{2} \log |2x+1|.$$

$$(2) \int x\sqrt{1-x} dx$$

$t = 1 - x$  とおき両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = -1$$

となるが, この両辺に  $-dx$  を掛けると

$$dx = -dt \quad (**)$$

という等式が得られる. この(\*\*)から  $dx$  を  $-dt$  に置き換えればよいことになる.  $x = 1 - t$  に注意して

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1-x} dx &= \int x\sqrt{t}(-dt) = \int (1-t)\sqrt{t}(-dt) \\ &= \int (t-1)\sqrt{t} dt = \int t\sqrt{t} dt - \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{3}{2}} dt - \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} (1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

$$(3) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$$

$$1 + \sin x = t$$

とおき置換積分法を使う. 両辺  $x$  で微分して

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

両辺に  $dx$  をかけて

$$\cos x dx = dt$$

だから  $1 + \sin x$  を  $t$  に,  $\cos x dx$  を  $dt$  に置き換えなければならないので

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{1+\sin x}.$$

$$(4) \int x(1-x)^4 dx$$

(2) と同様に  $1 - x = t$  による変換で

$$\begin{aligned}
\int x(1-x)^4 dx &= \int xt^4(-dt) = \int (1-t)t^4(-dt) \\
&= \int (t-1)t^4 dt = \int t^5 dt - \int t^4 dt \\
&= \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{5}t^5 = \frac{1}{6}(1-x)^6 - \frac{1}{5}(1-x)^5
\end{aligned}$$

$$(5) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$\cos x = t$  とおく。両辺微分して  $-\sin x = \frac{dt}{dx}$

$$\sin x dx = -dt$$

これらで置き換えをして

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\log |t| = -\log |\cos x|$$

5. (0) [準備]:  $\int e^{-x} dx$  を計算する。

$$-x = t$$

とおく。両辺を  $x$  で微分して

$$-1 = dt dx$$

両辺に  $-1$  をかけて

$$dx = -dt$$

したがって

$$\int e^{-x} dx = \int e^t(-dt) = -\int e^t dt = -e^t = -e^{-x}$$

$$(0.5) \int xe^{-x} dx$$

$f'(x) = e^{-x}$ ,  $g(x) = x$  とみて部分積分法

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

を使う。

まず  $f'(x) = e^{-x}$  であることから (0) より

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

となる. 次に部分積分法を使って

$$\begin{aligned}\int x e^{-x} dx &= (-e^{-x}) x - \int (-e^{-x}) (x)' dx \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}.\end{aligned}$$

短く言うと

$$\begin{aligned}\int x e^{-x} dx &= \int x (-e^{-x})' dx = x (-e^{-x}) - \int (x)' (-e^{-x}) dx \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}.\end{aligned}$$

としてもよい.

$$\begin{aligned}(1) \int x^2 e^{-x} dx &= \int x^2 (-e^{-x})' dx = x^2 (-e^{-x}) - \int (x^2)' (-e^{-x}) dx \\ &= x^2 (-e^{-x}) - \int 2x (-e^{-x}) dx \\ &= x^2 (-e^{-x}) + 2 \int x e^{-x} dx\end{aligned}$$

ここで (0.5) を使って

$$\begin{aligned}&= x^2 (-e^{-x}) + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) \\ &= (-x^2 - 2x - 2) (e^{-x}).\end{aligned}$$

$$(3) \int x \sin x dx$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

だから

$$(-\cos x)' = \sin x$$

であることがわかる. 次に部分積分法を使って

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= \int x (-\cos x)' dx \\ &= x (-\cos x) - \int (x)' (-\cos x) dx\end{aligned}$$



$$= -x \cos x + \sin x.$$