

積分の基本事項集 解答例

以下, 積分定数 C は省略する.

1. (不定積分の定義)

- (1) 「関数 $F(x)$ が関数 $f(x)$ の原始関数である」とはどういうことか、その定義を書け.

教科書 P.126 をよく読んで考えること。

- (2) 関数 $f(x)$ の不定積分を $\int f(x) dx$ で表す. $\int f(x) dx$ を定義する式を完成せよ.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

以後, 積分定数 C を省略する.

2. (主な関数の不定積分) 教科書 P.308 が参考になる。

- (1) a を 0 でない定数とするとき,

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}$$

だから

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} x^a \right) = x^{a-1}$$

だから

$$\int x^{a-1} dx = \frac{1}{a} x^a.$$

ここで $\alpha = a - 1$ とおくと, $a = \alpha + 1$ だから $\alpha \neq -1$ であるとき

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \quad (a \text{ と } \alpha \text{ を区別せよ})$$

$\alpha = -1$ であるときは次を使う.

$$(2) \frac{d}{dx} \log|x| = \frac{1}{x}$$

だから

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|.$$

$$(3) \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

だから

$$\int e^x dx = e^x.$$

$$(4) \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

だから

$$\int \cos x \, dx = \sin x. \quad \sin \frac{x^2}{2} \text{ は誤り.}$$

$$(5) \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

だから

$$\int \sin x \, dx = -\cos x.$$

3. (不定積分の性質)

$$(1) \int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$(2) \int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$$

ただし、これが正しいのは k が定数のときであり、 $\int x f(x) \, dx = x \int f(x) \, dx$ は誤り.

4. (べき関数の不定積分)

(1) 空欄に適する式を書け.

$$\begin{array}{ccccccccc} x^{-1} & & x^{-\frac{1}{2}} & & x^0 & & x^{\frac{1}{2}} & & x^1 \\ || & & || & & || & & || & & || \\ \frac{1}{x} & \longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{x}} & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \sqrt{x} & \longrightarrow & x \\ & & \sqrt{x} \text{倍} & & \sqrt{x} \text{倍} & & \sqrt{x} \text{倍} & & \sqrt{x} \text{倍} \end{array}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \text{ だから } 2(1) \text{ により}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$$

$$(3) \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \text{ だから}$$

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$(4) \frac{1}{x^2} = x^{-2} \text{ だから}$$

$$\int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \int \left(3x - 2 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx &= 3 \int x dx - 2 \int 1 dx - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \frac{3}{2}x^2 - 2x - 4\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

5. (置換積分法)

\int (x の関数) dx を

(手順1) $x = \varphi(t)$ または $\psi(x) = t$ とおくことにより x の関数を t の関数に変形する.

(手順2) (手順1) の関係式を微分して $dx = (x, t \text{ の式}) dt$ の形の関係式を得て, dx を $(x, t \text{ の式}) dt$ で置きかえる.

このことにより, \int (t の関数) dt に変形することができて積分が計算できることがある. この方法を置換積分法という.

(1) $3x + 1 = t \cdots (*)$ とおく

$$(3x + 1)^4 = t^4$$

(*) の両辺を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = 3$$

だから $dx = \frac{1}{3} dt$. これらを使って

$$\int (3x + 1)^4 dx = \int t^4 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \frac{t^{4+1}}{4+1} = \frac{t^5}{15} = \frac{1}{15} (3x + 1)^5$$

(2) (1) と同じ変数変換と 4 (3) を使って

$$\int \sqrt{3x + 1} dx = \int \sqrt{t} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9} (3x + 1)^{\frac{3}{2}}$$

(3) (1) と同じ変数変換と 2 (2) を使って

$$\int \frac{1}{3x + 1} dx = \int \frac{1}{t} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \log |t| = \frac{1}{3} \log |3x + 1|$$

(4) (1) と同じ変数変換で

$$\int e^{3x+1} dx = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} e^t = \frac{1}{3} e^{3x+1}$$

(5) (1) $3x + \frac{\pi}{2} = t \cdots (**)$ とおくと

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin t$$

(**) の両辺を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = 3$$

だから $dx = \frac{1}{3} dt$. これらを使って

$$\begin{aligned} \int \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) dx &= \int \sin(t) \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \sin(t) dt = -\frac{1}{3} \cos(t) \\ &= -\frac{1}{3} \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$\cos\left(\frac{3x^2}{2} + \frac{\pi x}{2}\right)$ は誤り.

(6) $x^2 + 1 = t \cdots (*)$ とおくと

$$(x^2 + 1)^4 = t^4$$

(*) の両辺を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

だから $dx = \frac{dt}{2x}$. これらを使って

$$\int (x^2 + 1)^4 x dx = \int t^4 x \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int t^4 dt = \frac{1}{10} t^5 = \frac{1}{10} (x^2 + 1)^5$$

(7) [やや高度] 授業スライド微分積分 B 第 7 回を見よ。

$$x = \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right) \cdots (*) \text{ とおくと}$$

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ (教科書 P.31 を見よ。)}$$

(*) の両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ (教科書 P.308 を見よ。)}$$

だから $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$. これらを使って

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \cos^2 t \frac{dt}{\cos^2 t} = \int dt = t$$

x で表すと $\tan^{-1} x$ となる。

(8) [やや高度] 授業スライド第 7 回を見よ。

$x = \sin t \cdots (*)$, $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと, この区間では $\cos t \geq 0$ であるから三平方の定理により

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t \text{ より } dx = \cos t dt$$

であるから

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos^2 t dt = \int \frac{\cos 2t + 1}{2} dt \\ &= \left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right) = \left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

ところで

$$\sin t = x, \quad \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}, \quad t = \sin^{-1} x$$

であるから

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x$$

6. (部分積分法)

$f(x), g(x), f'(x), g'(x)$ が連続の時,

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

が成り立つ.

(1) $\int x \sin x dx$ を計算しよう. $f'(x) = \sin x, g(x) = x$ と見ると,

$$f(x) = \int \sin x dx = -\cos x, \quad g'(x) = 1$$

だから,

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int x(-\cos x)' dx \\ &= x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x) dx \\ &= -x \cos x - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \sin x \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int x e^{-x} dx &= \int x(-e^{-x})' dx \\
&= x(-e^{-x}) - \int (x)'(-e^{-x}) dx \\
&= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx \\
&= -x e^{-x} - e^{-x}
\end{aligned}$$

7. (定積分) (1) 関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ と, 定積分 $\int_a^b f(x) dx$ の関係を書け。

定理 6.11 をみよ。

(2) $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおくと $F(x)$ と $f(x)$ の関係を書け。

微分積分学の基本定理である。

8. (定積分の置換積分法)

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad (1)$$

(定積分の置換積分法)

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

(1) $\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx$

$2x+1 = t$ (*) とおく. この両辺を x で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\frac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \quad (**)$$

という等式が得られる. (*), (**) によって積分変数を t に置き換えていくと

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \int t^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \frac{t^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \quad \text{だから}$$

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx = \left[\frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left(\frac{1}{3} 9^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{1}{3} 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{26}{3}.$$

別解

$$x = 0 \Rightarrow t = 1, \quad x = 4 \Rightarrow t = 9 \cdots (***)$$

これと (*), (**) をあわせて

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx = \int_1^9 \sqrt{t} \times \frac{dt}{2} = \left[\frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

でもよい

$$(2) \int_0^\pi \sin(3x) dx$$

$3x = t$ とおくと (1) と同様にして $dx = \frac{dt}{3}$ であるから

$$\int \sin 3x dx = \int \sin t \frac{dt}{3} = -\frac{1}{3} \cos t = -\frac{1}{3} \cos 3x.$$

だから

$$\int_0^\pi \sin 3x dx = \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^\pi = -\frac{1}{3} \cos 3\pi - \left(-\frac{1}{3} \cos 0 \right) = \frac{2}{3}.$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

だから部分積分法を使って

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\sin x)' dx = [x (\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) dx \\ &= [x (\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

8. (広義積分) (1) $\int_0^1 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} [\log x]_0^1 = \infty$

$$(2) \int_0^\infty e^{-2x} dx$$

$-2x = t$ とおくと $dx = -\frac{dt}{2}$ だから

$$\int e^{-2x} dx = \int e^t \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

だから

$$\int_0^\infty e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^\infty = \left(-\frac{1}{2} e^{-\infty} \right) - \left(-\frac{1}{2} e^0 \right) = \frac{1}{2}$$

$$(3) \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$$

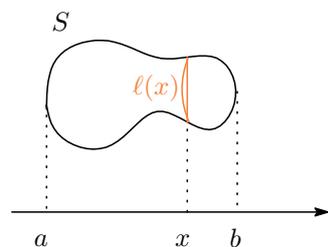
広義積分の場合でも (もし積分が収束するならば) 部分積分法を使うことができる。

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx &= \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-2x}}{2} \right)' \times x dx \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \times x \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \times 1 dx \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \times x \right]_0^{\infty} + \left[-\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \times x \right) - \left(-\frac{1}{2} e^0 \times 0 \right) + \left(-\frac{1}{4} e^{-\infty} \right) - \left(-\frac{1}{4} e^0 \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ここで $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{2x}} = 0, > 0, n = 0, 1, 2, \dots$ を使った。教科書 112 ページを見よ。

$$(4) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \left[\tan^{-1} x \right]_0^{\infty} = \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

9. (面積・体積) (1)



図のような図形を、点 $(x, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線で切った切り口の長さを $l(x)$ とする。このとき図形の面積 S を $l(x)$ で表せ。

第 5 回を復習してください。

(2) 関数 $y = x^2 - 2x$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$ のグラフの概形をかき、囲まれる部分の面積を計算せよ。

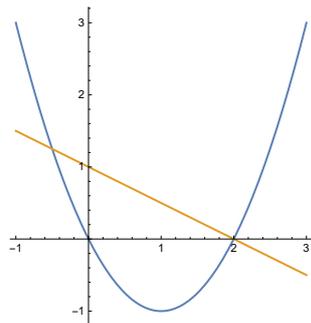
$y = x^2 - 2x$ は $x^2 - 2x = x(x - 2)$ であるから $x = 0$ または $x = 2$ のとき $y = 0$ となるので x 軸との交点は $(0, 0)$ $(2, 0)$ である。また $y = (x - 1)^2 - 1$ だから頂点が $(1, -1)$ の放物線である。下に凸であるのは明らか。

$y = -\frac{1}{2}x + 1$ は原点をとおり傾き $-\frac{1}{2}$ の直線である.

交点の座標は連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

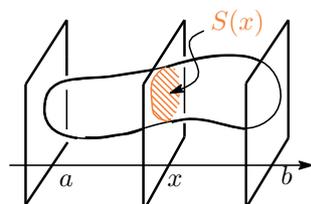
をといて $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ と $(2, 0)$.



囲まれる部分は $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ の範囲にあり, この範囲では直線 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ が放物線 $y = x^2 - 2x$ の上方にある。

$$\int_{-\frac{1}{2}}^2 \left\{ \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) - (x^2 - 2x) \right\} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^2 \left\{ -x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \right\} dx = \frac{125}{48} \quad \text{訂正}$$

(3)



図のような立体図形の体積を V , 点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積を $S(x)$ とするとき V を $S(x)$ で表せ.

第 5 回を復習してください。

(4) $y = \sqrt{2x}$ のグラフ, $x = 0$, $x = 1$ と x 軸で囲まれる図形を x 軸の周りで 1 回転してできる図形の体積を求めよ.

第 6 回問題を参考にせよ。答えは π