積分の基本事項集 (増訂)

学生番号								氏名		

1. (不定積分の定義)

(1) 「関数 $F(x)$ が関数 $f(x)$ の原始関数である」とはどういうことか、その定義を書け.

(2) 関数 $f(x)$ の不定積分を $\displaystyle\int f(x)\,dx$ で表す. $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を定義する式を完成せよ.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff \frac{d}{dx}\boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$$

以後, 積分定数 C を省略する.

2. (主な関数の不定積分)

(1) a を 0 でない定数とするとき,

$$\frac{d}{dx}x^a = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

だから

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}x^a\right) = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

だから

$$\int x^{a-1}\,dx = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

ここで $\alpha = a - 1$ とおくと, $\alpha \neq -1$ であるとき

$$\int x^{\alpha}\,dx = \boxed{\quad\quad\quad\quad}. \ (\alpha \text{ で表せ})$$

$\alpha = -1$ であるときは次を使う.

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\log|x| = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$

だから

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \boxed{\quad\quad\quad\quad}.$$

(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}e^x = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$

だから

$$\int e^x\,dx = \boxed{\quad\quad\quad\quad}.$$

(4) $\displaystyle\frac{d}{dx}\sin x = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$

だから

$$\int \cos x\,dx = \boxed{\quad\quad\quad\quad}.$$ $\displaystyle\sin\frac{x^2}{2}$ は誤り.

(5) $\displaystyle\frac{d}{dx}\cos x = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$

だから

$$\int \sin x\,dx = \boxed{\quad\quad\quad\quad}.$$

3. (不定積分の性質)

(1) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

ただし, これが正しいのは k が定数のときであり, $\displaystyle\int xf(x)\,dx = x\int f(x)\,dx$ は誤り.

4. (べき関数の不定積分)

(1) 空欄に適する式を書け.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x^{-1} & & x^{-\frac{1}{2}} & & x^{0} & & x^{\frac{1}{2}} & & x^{1} \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\boxed{\frac{1}{x}} & \xrightarrow{\boxed{\quad}\text{倍}} & \boxed{\quad} & \xrightarrow{\boxed{\quad}\text{倍}} & \boxed{\quad} & \xrightarrow{\boxed{\quad}\text{倍}} & \boxed{\sqrt{x}} & \xrightarrow{\boxed{\quad}\text{倍}} & \boxed{\quad}
\end{array}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\boxed{\quad\quad}}$ だから

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

(3) $\sqrt{x} = x^{\boxed{\quad\quad}}$ だから

$$\int \sqrt{x}\,dx$$

(4) $\displaystyle\frac{1}{x^2} = x^{\boxed{\quad\quad}}$ だから

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

(5) $\displaystyle\int \left(3x - 2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\,dx$

5. (置換積分法)

$\int (x \text{ の関数})\, dx$ を

(手順 1)　$x = \varphi(t)$ または $\psi(x) = t$ とおくことにより x の関数を t の関数に変形する.

(手順 2)　(手順 1) の関係式を微分して $dx = \boxed{}\, dt$ の形の関係式を得て, dx を $\boxed{}\, dt$ で置きかえる.

このことにより, $\int (t \text{ の関数})\, dt$ に変形することができて積分が計算できることがある. この方法を置換積分法という.

(1) $3x + 1 = t \cdots (*)$ とおくと

$(3x+1)^4 = \boxed{}$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$\dfrac{dt}{dx} = \boxed{}$

だから $dx = \boxed{}\, dt$. これらを使って

$\int (3x+1)^4\, dx =$

(2) (1) と同じ変数変換で

$\int \sqrt{3x+1}\, dx =$

(3) (1) と同じ変数変換で

$\int \dfrac{1}{3x+1}\, dx =$

(4) (1) と同じ変数変換で

$\int e^{3x+1}\, dx =$

(5)

$\int \sin(3x + \frac{\pi}{2})\, dx =$

$\cos\left(\dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{\pi x}{2}\right)$ は誤り.

(6) $x^2 + 1 = t \cdots (*)$ とおくと

$(x^2+1)^4 = \boxed{}$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$\dfrac{dt}{dx} = \boxed{}$

だから $dx = \boxed{}\, dt$. これらを使って

$\int (x^2+1)^4 x\, dx =$

(7) $x = \tan t \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right) \cdots (*)$ とおくと

$1 + x^2 = \boxed{}$ (t で表せ)

$(*)$ の両辺を t で微分すると

$\dfrac{dx}{dt} = \boxed{}$

だから $dx = \boxed{}\, dt$. これらを使って

$\int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx =$　(t で表してよい)

(8) $x = \sin t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right) \cdots (*)$ とおくと

$\sqrt{1-x^2} = \boxed{}$

$(*)$ の両辺を t で微分すると

$\frac{dx}{dt} = \boxed{}$

だから $dx = \boxed{} dt$. これらを使って

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx =$ (t で表してよい)

6. (部分積分法)

$f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ が連続の時,

$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

が成り立つ.

(1) $\int x \sin x\,dx$ を計算しよう. $f'(x) = \sin x$, $g(x) = x$ と見ると,

$$f(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x,\ g'(x) = 1$$

だから,

$\int x \sin x\,dx =$

(2) $\int xe^{-x}\,dx$

7. (定積分) (1) 関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ と, 定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の関係を書け。

(2) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおくとき $F(x)$ と $f(x)$ の関係を書け.

8. (定積分の置換積分法)

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{1}$$

(定積分の置換積分法)

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

(1) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

(2) $\int_0^\pi \sin(3x)\,dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\,dx$

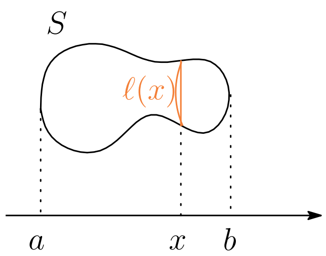
8. (広義積分) (1) $\int_0^1 \frac{1}{2x}\,dx$

(2) $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx$

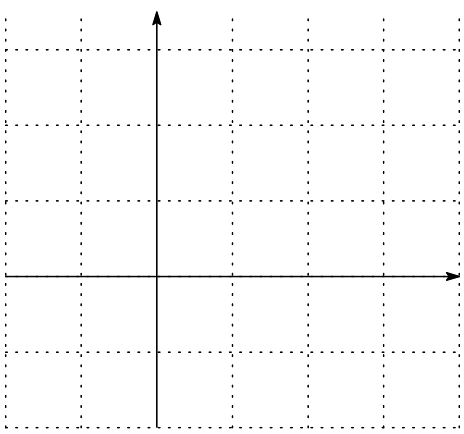
(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

9. (面積・体積) (1)

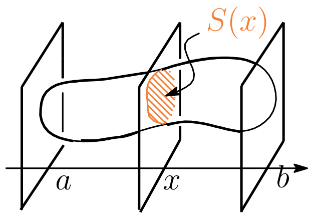


図のような図形を, 点 $(x, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線で切った切り口の長さを $\ell(x)$ とする. このとき図形の面積 S を $\ell(x)$ で表せ.

(2) 関数 $y = x^2 - 2x$, $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ のグラフの概形をかき, 囲まれる部分の面積を計算せよ.



(3)



図のような立体図形の体積を V, 点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積を $S(x)$ とするとき V を $S(x)$ で表せ.

(4) $y = \sqrt{2x}$ のグラフ, $x = 0$, $x = 1$ と x 軸で囲まれる図形を x 軸の周りで 1 回転してできる図形の体積を求めよ.