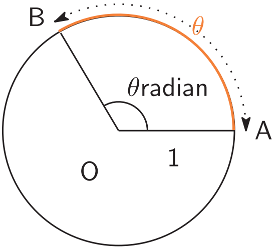
本日やること

1. 三角関数
   - 弧度法
   - 回転の角
   - 三角関数の定義
   - グラフの作図
   - 回転を表す線形変換

三角関数

弧度法

弧度法の定義



$\theta > 0$ とする.
原点中心半径 1 の円において弧 AB の長さが θ であるとき,

$$\angle \mathrm{AOB} = \theta \ (\text{ラジアン})$$

であると定める.

このような角の大きさのはかり方を弧度法という。普通、θ (rad) と書くが (rad) を省略することもある。一方, 1 回転を 360° とするはかり方を度数法という。

三角関数

弧度法の性質

度数法と比較すると,

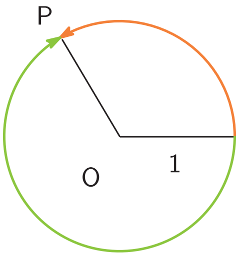
1 回転 $= 360°$, 半径 1 の円の円周の長さ $= 2\pi$

だから

$$2\pi\ (\mathrm{rad}) = 360°, \quad \pi\ (\mathrm{rad}) = 180°, \quad \frac{\pi}{2}\ (\mathrm{rad}) = 90°, \cdots$$

三角関数
回転の角

回転の角の定義



P が原点中心半径 1 の円周上を回転しているとき

P の回転の角が θ (rad) であるとは

正の向きの回転のとき $\theta =$(P の軌跡の長さ)
負の向きの回転のとき $\theta = -$(P の軌跡の長さ)

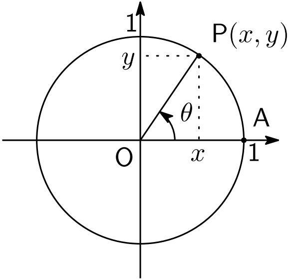
であること．ただし

正の向きの回転：左回り (反時計回り) の回転
負の向きの回転：右回り (時計回り) の回転

三角関数

定義

三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1,0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし，P の座標を (x,y) とするとき

$\cos\theta = x$: 余弦

$\sin\theta = y$: 正弦

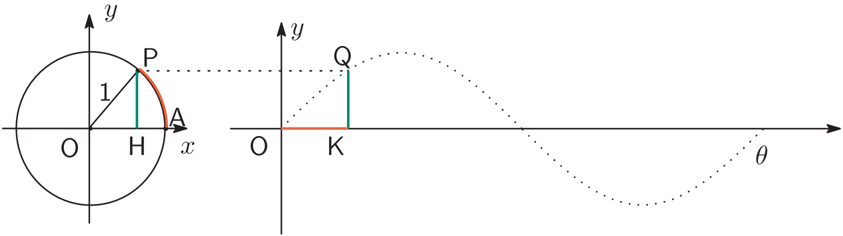
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$: 正接

と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

また，これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という.

三角関数
グラフの作図

グラフの作図 [考え方]



1. x, y 平面に原点中心の半径 1 の円を書き, 円周上に点 A$(1, 0)$, P(x, y) をとる。∠AOP$=\theta$ とすると三角関数の定義により, (弧 AP の長さ)$=\theta$, $y=\sin\theta$ となる。

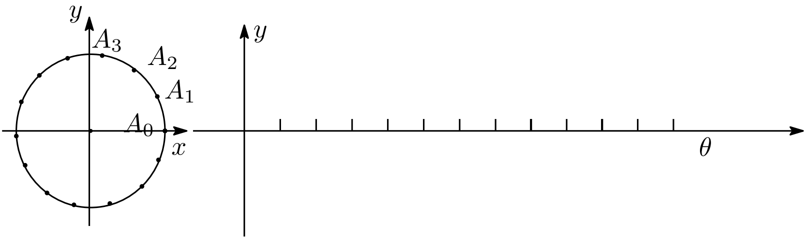
2. 三角関数 $y=\sin\theta$ は θ に対して y を対応させる関数であるから, そのグラフは, θy 平面に点 H(θ, y) をとるとき, P を円周上で動かしたとき H がえがく曲線である。

3. 上の図を用いて $y=\sin\theta$ のグラフを書くには, K を (弧 AP の長さ)=OK $(=\theta)$ となるようにとり, Q を HP=KQ となるようにとればよい。

三角関数

グラフの作図

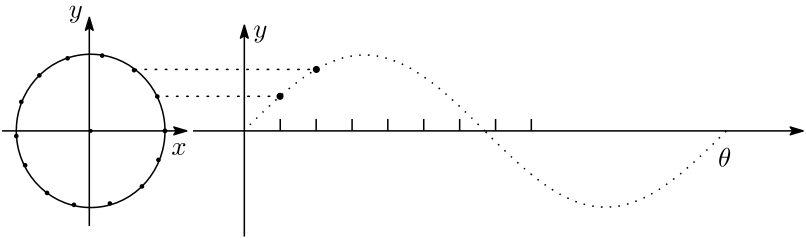
[座標軸の用意]



(0) 前のページの 3 のことを実現するために, 円筒のふちにグラフ用紙を細く切って巻き付けたものを使う。
(i) グラフ用紙を横長に使い、左側に xy 平面の座標軸、右側に θy 平面の座標軸を書け。用意した円筒を使って xy 平面に原点中心の円をかけ。円筒の直径を測って円筒の中心が原点に来るようにせよ。
(ii) 円筒に貼り付けてあるグラフ用紙のメモリを利用して、円周上に 1cm 間隔で点を打て。初めの点は x 軸上にとれ。(これらの点を $A_0, A_1, A_2, \cdots$ とする。)

三角関数
グラフの作図

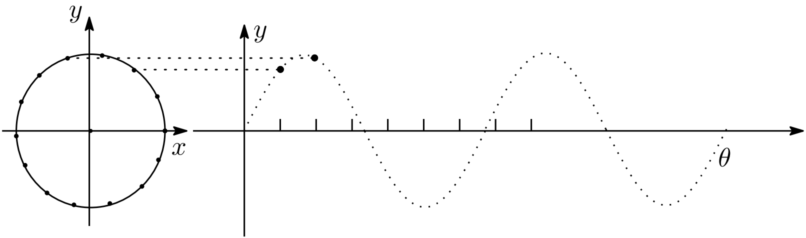
[$y = \sin\theta$ のグラフの作図]



θy 平面に $y = \sin\theta$ のグラフの概形をかこう．円筒の半径を 1 と見なす。
$\theta = 0, 1, 2, \cdots$ に対して y 座標は $A_0, A_1, A_2, \cdots$ の y 座標であるような点を θy 平面に打っていき、なめらかに結べば、円筒の半径を 1 とした $y = \sin\theta$ のグラフがかける。

三角関数
グラフの作図

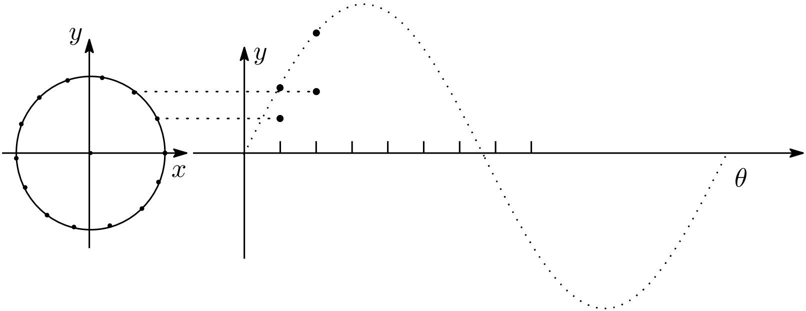
[$y = \sin 2\theta$ のグラフの作図]



θy 平面に $y = \sin 2\theta$ のグラフの概形をかこう．円筒の半径を 1 と見なす。
$\theta = 0, 1, 2, \cdots$ に対して y 座標は $A_0, A_2, A_4, \cdots$ の y 座標であるような点を θy 平面に打っていき、なめらかに結べば、円筒の半径を 1 とした $y = \sin 2\theta$ のグラフがかける。

三角関数
グラフの作図

[$y = 2\sin\theta$ のグラフの作図]



θy 平面に $y = 2\sin\theta$ のグラフの概形をかこう．円筒の半径を 1 と見なす。
$\theta = 0, 1, 2, \cdots$ に対して y 座標は $A_0, A_1, A_2, \cdots$ の y 座標の 2 倍であるような点を θy 平面に打っていき、なめらかに結べば、円筒の半径を 1 とした $y = 2\sin\theta$ のグラフがかける。

三角関数
グラフの作図

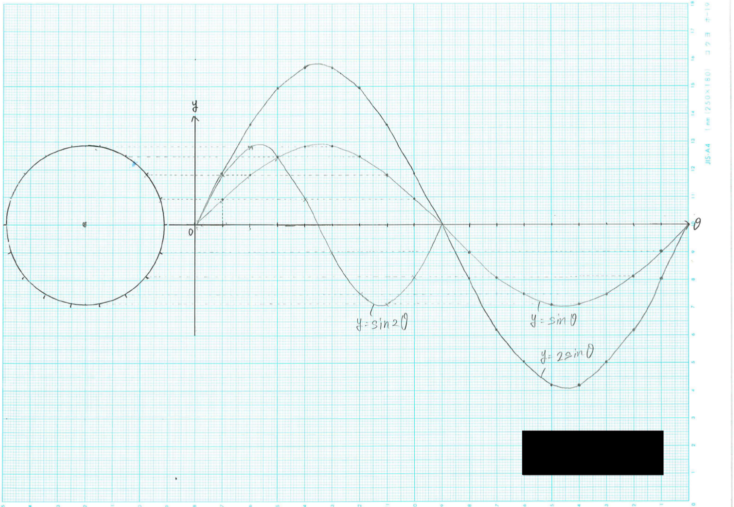
sin のグラフ

(1) $y = \sin\theta$ のグラフは周期 2π で繰り返す波形の曲線である。
(2) $y = \sin 2\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを θ 方向に $\dfrac{1}{2}$ に押し縮めたものであり, 周期は半分振動数は 2 倍になる。
(3) $y = 2\sin\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを y 方向に 2 倍に拡大したものである。

$\sin 2\theta = 2\sin\theta$ は誤り。

三角関数

グラフの作図



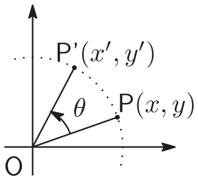
[redacted]

線形変換

回転を表す線形変換

三角関数の加法定理を行列を使って証明する。

平面上の点の回転



平面の点 P(x, y) を原点 O のまわりで角 θ 回転させてできる点 P$'$ の座標 (x', y') は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

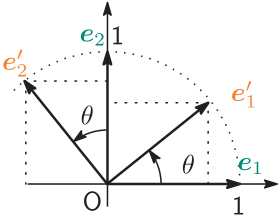
と表される。

要するに点 P を回転させることは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ をかけることである。

線形変換

回転を表す線形変換

[確かめ] (Step 1.) ベクトルの成分表示を列ベクトルで表すことにする。



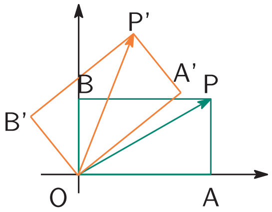
$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし，それらを角 θ 回転してできるベクトルを $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ で表すことにする。このとき図より明らかに

$$\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2' = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

である。

線形変換

回転を表す線形変換



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$$

であるが，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = x\boldsymbol{e}'_1 + y\boldsymbol{e}'_2$$

で P$'$ を決めると図より明らかに $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を角 θ 回転したものである。

以上から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP'}} &= x\boldsymbol{e}'_1 + y\boldsymbol{e}'_2 = x\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

これは $(\star)$ と同じ。

線形変換

合成変換・逆変換

[加法定理の証明]
点 P を $\alpha+\beta$ (rad) 回転させることは，まず α (rad) 回転させてから，その結果の点をさらに β (rad) 回転させる事と同じであるから

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

成分を比較して

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

が導かれた。