本日やること

1. 復習：対数
    - 対数の定義
    - 対数の性質
2. 三角比
    - 三平方の定理
    - 三角比
    - 三角比の応用

対数関数

対数の定義

対数の定義

a を $a > 0$, $a \neq 1$ を満たす定数とする．このとき，正の数 M に対して

$$a^p = M$$

となる実数 p がただ 1 つ存在する．この p を

$$p = \log_a M, \quad M > 0$$

と表し，a を底とする M の対数という．また，M を真数と呼ぶ．つまり

$$p = \log_a M \quad \Longleftrightarrow \quad a^p = M \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である．$\log_a M$ はログ底 a の M と読む．

対数関数

対数の性質

対数の性質

a, b : 1 でない正の数, $M>0$, $N>0$, k, x, p を実数とするとき

(i) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

(ii) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

(iii) $\log_a\left(M^k\right) = k\log_a M$

(iv) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$　(底の変換公式)

すべて指数法則を対数の言葉で言い換えたものである。

対数関数

対数の性質

指数, 対数関数の中でも, 特に底をネイピアの数 $e = 2.71828\ldots$ としたもの, すなわち e^x, $\log_e x$ は, 応用上非常に便利な性質をもっているので大切である.

$\log_e x$ は自然対数と呼ばれ, 記号 $\log x$ あるいは $\ln x$ で表す. (電卓では Ln キーを押す。)

これに対して 10 を底とする対数を常用対数と呼ぶ. (電卓では Log キーを押す。)

正の整数 n に対して $\log_{10} n + 1$ の整数部分は n の桁数を表す。

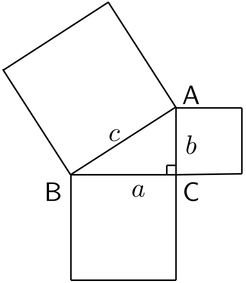
[例] $n = (1358)^3 \times (6324)^2$ は

$$\log_{10} n = 3\log_{10}(1358) + 2\log_{10}(6324) \fallingdotseq 3 \times 3.1329 + 2 \times 3.8010 = 17.0009$$

だから 18 桁の数である。

直角三角形・三平方の定理

三平方の定理



直角三角形 ABC において

$$a^2 + b^2 = c^2$$

すべての古代文明で知られていた，極めて重要な定理です。

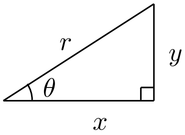
証明はウェブ上にたくさんあります。たとえば

https://www.youtube.com/watch?v=wn3GwS4YCb0
https://www.geogebra.org/m/QypBGmCJ

三角比

定義 (鋭角の場合)

三角比の定義 (鋭角の場合)



角 θ が鋭角の場合, 図のような直角三角形を用いて

θ の正弦を $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

θ の余弦を $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

θ の正接を $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

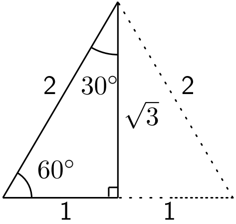
と定める。

三角形を相似に拡大 (縮小) してもこの値は変わらず, θ のみによって決まる。

三角比

特別な角の三角比

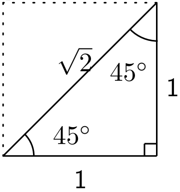
[正三角形を半分にしたもの]　三平方の定理により $(\text{対辺})^2 = 2^2 - 1^2 = 3$



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

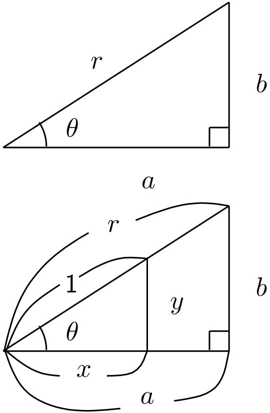
[正方形を半分にしたもの]　三平方の定理により $(\text{斜辺})^2 = 1^2 + 1^2 = 2$



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \tan 45^\circ = 1$$

三角比

定義 (一般の角の場合)



直角三角形を r が 1 になるように相似変形しても

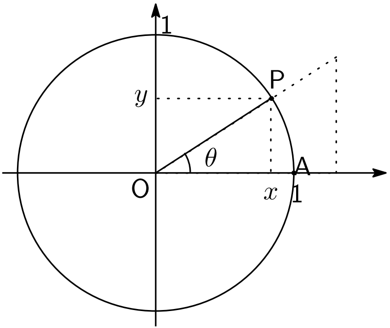
$$\frac{a}{r} = x, \quad \frac{b}{r} = y$$

だからこれを利用して三角比の定義を拡張する。

三角比

定義 (一般の角の場合)

三角比の定義 (一般の角の場合)



原点中心の単位円周上で

A$(1, 0)$　P(x, y)　∠AOP $= \theta$

とするとき

$\sin\theta = y$

$\cos\theta = x$

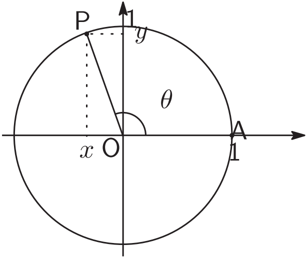
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

と定める。

三角形を相似に拡大 (縮小) してもこの値は変わらず, θ のみによって決まる。

三角比

定義 (一般の角の場合)

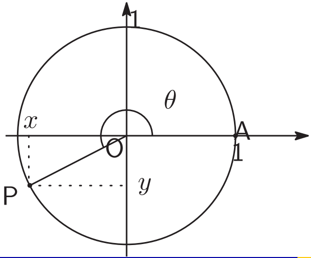


$90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき

$\sin\theta = y > 0$

$\cos\theta = x < 0$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} < 0$



$180^\circ < \theta < 270^\circ$ のとき

$\sin\theta = y < 0$

$\cos\theta = x < 0$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} > 0$

三角比

相互関係

相互関係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

負の角の三角関数

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta, \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

余角の三角関数

$$\cos\left(90^\circ - \theta\right) = \sin\theta, \quad \sin\left(90^\circ - \theta\right) = \cos\theta, \quad \tan\left(90^\circ - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$$

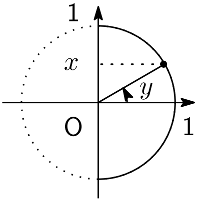
補角の三角関数

$$\cos\left(180^\circ - \theta\right) = -\cos\theta, \quad \sin\left(180^\circ - \theta\right) = \sin\theta, \quad \tan\left(180^\circ - \theta\right) = -\tan\theta$$

三角比

逆三角関数

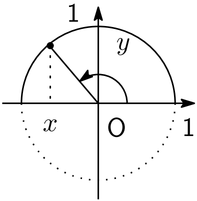
逆三角関数の定義



$$y = \sin^{-1} x, \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

$$\iff$$

$$x = \sin y, \quad (-90^\circ \leqq y \leqq 90^\circ)$$



$$y = \cos^{-1} x, \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

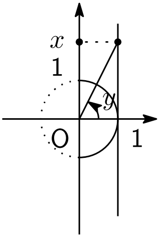
$$\iff$$

$$x = \cos y, \quad (0 \leqq y \leqq 180^\circ)$$

三角比

逆三角関数

逆三角関数の定義



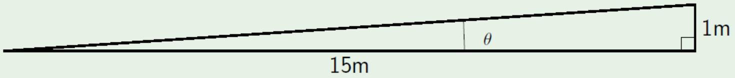
$$y = \tan^{-1} x, \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\iff$$

$$x = \tan y, \quad (-90^\circ < y < 90^\circ)$$

三角比

例題: スロープの勾配が 1/15 のとき，スロープと設置面のなす角は何度になるか，小数第 3 位を四捨五入して答えよ．



求める角を $\theta°$ とすると $\tan\theta = \frac{1}{15}$.
関数電卓を用いると $\tan^{-1}\frac{1}{15} = 3.81°$.

※ スロープの長さが分からなくても勾配さえわかれば計算できる

三角比

三角比の応用

[三角形の解法]

三角形の 3 辺が分かれば三角形は一つに決まる。

「2 辺とその挟む角」が分かるときも三角形は決まり、残りの 1 辺は計算で求められる。

「2 角とその挟む辺」が分かるときも三角形は決まり、残りの 2 辺は計算で求められる。

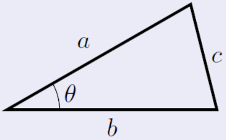
そのための方法を述べる。

三角比
三角比の応用

余弦定理

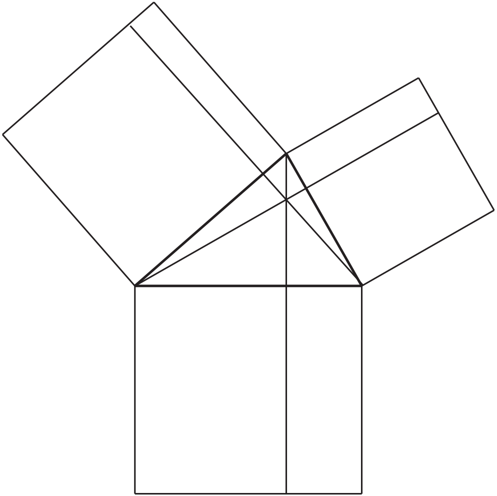
三角形の 2 辺の長さがそれぞれ a, b で，その間の角が θ のとき，もう 1 辺の長さ c との間に次の関係が成り立つ:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$



三角比

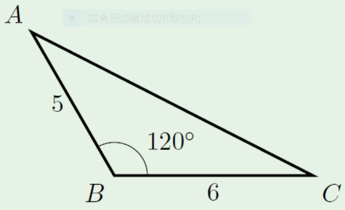
三角比の応用



三角比

三角比の応用

例: 下の図の辺 CA の長さを求めよ

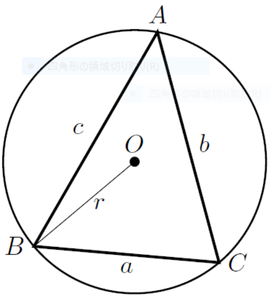


余弦定理より (AC の長さ)$= x$ とおくと

$$\begin{aligned} x^2 &= 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos 120^\circ \\ &= 25 + 36 - 60 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 61 + 30 = 91 \end{aligned}$$

三角比

三角比の応用



正弦定理

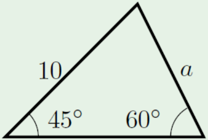
三角形 ABC の辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする．
このとき，外接円の半径 r との間に次の関係が成り立つ．

$$2r = \frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}.$$

三角比

三角比の応用

例題: 下図の a を求めよ



正弦定理より

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = a\sqrt{2}$$

よって

$$a\sqrt{2} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \quad \text{より}$$

$$a = \frac{20\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{20\sqrt{6}}{6} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$