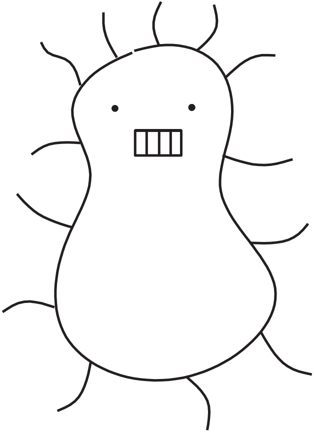
本日やること

1. 指数関数
   - 微生物の増殖
   - 定数倍変化の法則
   - 有理数べき
   - 指数法則
   - 実数べき
   - 指数関数の定義
   - グラフ
   - 性質
2. 対数関数
   - 対数の定義
   - 対数の性質
   - 対数関数の定義

指数関数

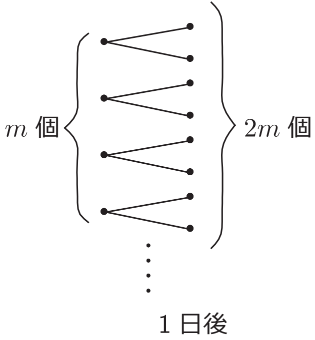
微生物の増殖



指数関数

微生物の増殖

分裂して増殖することにより個体数が 1 日で 2 倍になる微生物がある。



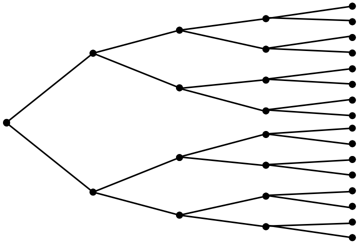
初めの個体数を m 倍にすると

$\Rightarrow$ 1 日後 $2m$ 倍となる。

m に比例する変化である.

指数関数

微生物の増殖



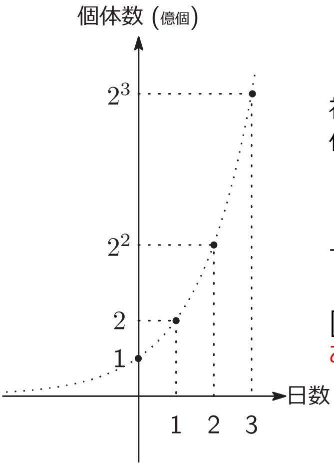
1 日後　2 日後　3 日後　4 日後

日数を n 倍とする

$\Rightarrow$ n 日後 2^n 倍となる。

等比数列的変化である。

指数関数
微生物の増殖



初めの個体数を 1 (億個) とすると n 日後の個体数は

$$2^n \text{ (億個)}, \quad n = 1, 2, 3 \cdots$$

である。

[本日の目標]　増殖は連続的変化であるはずである。t 日後 (t は実数) の個体数を決めたい。

指数関数

定倍率変化の法則

「1 日で a 倍に増殖する」 (a は正の定数)

を一歩進めて

「(どの時点から始めても) 一定の時間がたつと全個体中の一定割合の個体が分裂する」

「その結果 1 日後に a 倍になる。(a は正の定数)」

と考える。

t 日後の個体数を a^t と書くことにする。ただし t は実数である. これを実数冪 (べき) とよぶ。

指数関数
定倍率変化の法則

だから次のことが成り立つとしてよいだろう。

定倍率変化の法則

t が一定量 h だけ増加すると, a^t は t によらず一定の倍率 $u(h)$ で変化する。すなわち

$$\frac{a^{t+h}}{a^t} = u(h) \quad (u(h) \text{ は } t \text{ によらない}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \spadesuit$$

これを定倍率変化の法則という。

指数関数

有理数べき

定倍率変化の法則が成り立つものと仮定して，

有理数べき　$a^{\frac{n}{m}}$　$(m, n$ は整数$, m \neq 0)$

を決めたい。

t	-2	-1	0	1	2	3
a^t				a	a^2	a^3

だから

$$a^0 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓑ}$$

のように決まる。

指数関数

復習：累乗根

復習：累乗根

$a \geqq 0$, $n = 2, 3, \cdots$ に対し

$$x^n = a \text{ かつ } x \geqq 0$$

を満たす実数 x がただ 1 つ存在する．この x を a の（非負の）n 乗根といい $\sqrt[n]{a}$ で表す．

$n = 2$ のときは平方根： $x = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a$ かつ $x \geqq 0$

$\sqrt{2} = 1.4142\cdots \qquad (1.4142)^2 \fallingdotseq 2.000$

$\sqrt[3]{2} = 1.25992\cdots \qquad (1.25992)^3 \fallingdotseq 2.000$

$\sqrt[4]{2} = 1.18921\cdots \qquad (1.18921)^4 \fallingdotseq 2.000$

指数関数
有理数べき

t	0	$\frac{n}{m}$	$\frac{2n}{m}$	n
a^t	1	x とおく		a^n

だから

$$x^m = a^n \qquad (x > 0 \text{ としてよいから} \Leftrightarrow\ x = \sqrt[m]{a^n})$$

だから

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓒ}$$

と決まる。

指数関数

有理数べき

t	$-\frac{n}{m}$	0	$\frac{n}{m}$
a^t	x とおく	1	$\sqrt[m]{a^n}$

だから

$$x = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$$

だから

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \; (D)$$

と決まる。

指数関数

指数法則

定倍率変化の法則 (♠) は

指数法則

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad t, s \text{ は有理数} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\diamondsuit)$$

と同値である。なぜなら

$$\spadesuit \Leftrightarrow \frac{a^{t+s}}{a^s} = u(t) \quad (s \text{ によらない})$$
$$\Leftrightarrow a^{t+s} = a^s u(t)$$

ここで $s = 0$ を代入すると $a^0 = 1$, $a^t = u(t)$ だから

$$\Leftrightarrow a^{t+s} = a^s a^t$$

指数関数

指数法則

まとめると

指数法則と有理数べき

指数法則　$a^{t+s} = a^t a^s, \quad t, s$ は有理数　…………………… ◇

をみとめると有理数べきは

$$a^0 = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n = 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓑ}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓒ}$$

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓓ}$$

のように定められる。

指数関数

指数法則

指数法則と有理数べき

逆に A, B, C, D のように定めると指数法則が成り立つことが確かめられる。

$r = \dfrac{l}{k}$, $s = \dfrac{n}{m}$ (k, m は自然数, l, n は整数) のとき $a^r a^s = a^{r+s}$ を満たすことを示そう.
(自然数べきが指数法則を満たすことは認めることにする。)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})^{km} &= (a^{\frac{l}{k}} a^{\frac{n}{m}})^{km} = (\sqrt[k]{a^l}\ \sqrt[m]{a^n})^{km} = ((\sqrt[k]{a^l})^k)^m((\sqrt[m]{a^n})^m)^k \\
&= (a^l)^m (a^n)^k = (a^{lm})(a^{nk}) = a^{lm+nk} \\
(\text{右辺})^{km} &= (a^{\frac{l}{k}+\frac{n}{m}})^{km} = (a^{\frac{kn+ml}{km}})^{km} = (\sqrt[km]{a^{kn+ml}})^{km} = a^{kn+ml}
\end{aligned}
$$

だから $(\text{左辺})^{km} = (\text{右辺})^{km}$. 両辺の km 乗根をとって左辺 $=$ 右辺を得る.

指数関数

指数法則

指数法則に追加

$a>0,\ b>0,\ t, s$ は有理数のとき

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$,

(ii) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

(iii) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(iv) $(ab)^r = a^r b^r$

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

指数関数

累乗根を含む式の計算

累乗根は有理数べきに直して指数法則を使って計算するのがよい。

[例]

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a^3 \times \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a}} &= \left(a^3 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(a^{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= a^{(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}} \\
&= a^{\frac{15}{8}}
\end{aligned}
$$

指数関数

実数べき

実数べきの定義

実数 t に対してこれに近づいていく有理数の列 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ がある．このとき，$a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \cdots$ が定義されるが，これらもある値に近づいていくことが知られている。この値を

$$a^t$$

と定める。これを実数べきという。

以上で

[目標]　等比数列 a^n $(n = 1, 2, \cdots)$ を拡張して a^t を作ること

が達成された。

指数関数

実数べき

[例]

$$
\begin{aligned}
2^{1} &= 2 \\
2^{1.4} &= 2.63901582\ldots \\
2^{1.41} &= 2.65737162\ldots \\
2^{1.414} &= 2.66474965\ldots \\
2^{1.4142} &= 2.66511908\ldots \\
2^{1.41421} &= 2.66513756\ldots \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
2^{\sqrt{2}} \quad &= 2.66514414\ldots
\end{aligned}
$$

実数べきも指数法則を満たすことが知られている

指数関数

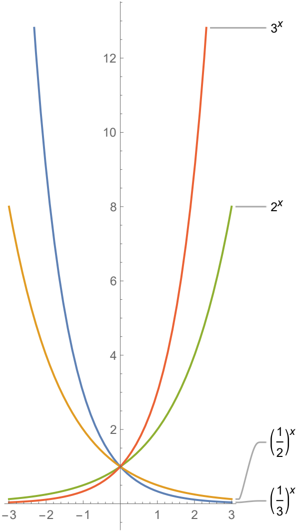
定義

指数関数の定義

$a > 0,\ a \neq 1$ とする．実数べきから作られる関数 $f(x) = a^x$ を，a を底とする x の指数関数とよぶ．
定義域は実数全体である．

指数関数

グラフ



$2, 2^2, 2^3, \cdots$ は激しく増加する。

実数べき 2^x は等比数列 2^n, $(n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから, x が増加すると同様に激しく増加する。

$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \cdots$ は非常にはやく 0 に近づく。

実数べき $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は等比数列 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $(n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから, x が増加すると同様に非常にはやく 0 に近づく。

指数関数

性質

定理 2.1. 指数関数の性質

(I) 指数関数 $f(x) = a^x$ の定義域は実数全体 $\mathbb{R}$, 値域は正の実数全体 $(0, \infty)$ である．また,

(i) $1 < a$ のとき狭義単調増加,

(ii) $0 < a < 1$ のとき狭義単調減少.

(II) すべての実数 $t, s \in \mathbb{R}$ に対して次の指数法則が成り立つ.

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad a^{t-s} = \frac{a^t}{a^s}, \quad a^{ts} = (a^t)^s$$

ただし, 関数 $f(x)$ が

狭義単調増加であるとは $t < s \Rightarrow f(t) < f(s)$ であること。

狭義単調減少であるとは $t < s \Rightarrow f(t) > f(s)$ であること。

対数関数

対数の定義

対数の定義

a を $a>0$, $a\neq 1$ を満たす定数とする．このとき，正の数 M に対して

$$a^p = M$$

となる実数 p がただ 1 つ存在する．この p を

$$p = \log_a M, \quad M > 0$$

と表し，a を底とする M の対数という．また，M を真数と呼ぶ．つまり

$$p = \log_a M \quad \Longleftrightarrow \quad a^p = M \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である．$\log_a M$ はログ底 a の M と読む．

対数関数

対数の定義

特に

$$a^{\log_a M} = M$$

$$\log_a a^p = p$$

$$\log_a a = 1 \iff a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1$$

注意すること

底の条件：$a > 0,\ a \neq 1$

真数条件：$M > 0$

対数関数

例

[例]

$\log_2 \sqrt{32}$ を求める.

$\log_2 \sqrt{32} = p$ とおくと 定義より

$\Leftrightarrow \ 2^p = \sqrt{32}$

ところで $\sqrt{32} = (2^5)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$ だから指数を比較して

$$p = \frac{5}{2}$$

対数関数

対数の性質

対数の性質

$a,\ b$: 1 でない正の数, $M > 0,\ N > 0,\ k,\ x,\ p$ を実数とするとき

(i) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

(ii) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

(iii) $\log_a\left(M^k\right) = k\log_a M$

(iv) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ (底の変換公式)

すべて指数法則を対数の言葉で言い換えたものである。

対数関数

対数の性質

[(i) の確かめ]

$$\log_a M = t \text{ とおく} \quad \overset{\text{定義より}}{\Longleftrightarrow} \quad a^t = M$$

$$\log_a N = s \text{ とおく} \quad \overset{\text{定義より}}{\Longleftrightarrow} \quad a^s = N$$

かけ合わせて $a^t a^s = MN$

指数法則より $\|$

$$\log_a MN = t + s \quad \overset{\text{定義より}}{\Longleftrightarrow} \quad a^{t+s}$$

$\|$

$$\log_a M + \log_a N$$

対数関数
対数の性質

[(iv) の確かめ]

$$\log_a b = t \qquad \log_b c = s \quad \text{とおく}$$

定義より $\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$$a^t = b \qquad b^s = c$$

指数法則より

$$a^{ts} = (a^t)^s = b^s = c$$

定義より $\Updownarrow$

(iv) $\Longleftrightarrow$ $\log_a c = ts = \log_a b \log_b c$

対数関数

例

[例]

$X=\log_a x$, $Y=\log_a y$, $Z=\log_a z$ とおくと

$$\log_a(xyz)=\log_a x+\log_a y+\log_a z=X+Y+Z$$

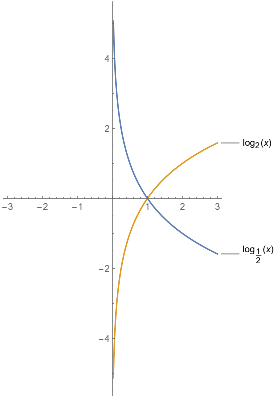
$$\begin{aligned}\log_a \frac{\sqrt{x}y}{\sqrt{z^3}}&=\log_a(x^{\frac{1}{2}}yz^{-\frac{3}{2}})=\frac{1}{2}\log_a x+\log_a y-\frac{3}{2}\log_a z\\&=\frac{1}{2}X+Y-\frac{3}{2}Z\end{aligned}$$

指数関数

定義

対数関数の定義

$a > 0,\ a \neq 1$ とする．関数 $f(x) = \log_a x$ を，a を底とする x の対数関数とよぶ．



定義域は 正の実数全体 $(0, \infty)$，値域は 実数全体 $\mathbb{R}$ である．また，

(i) $1 < a$ のとき狭義単調増加，

(ii) $0 < a < 1$ のとき狭義単調減少．

指数関数の逆関数である。