本日やること

1. ベクトル
   - スカラー量・ベクトル量
   - ベクトルの定義・演算
   - ベクトルの成分表示
   - 内積
   - ベクトルの平行・垂直
   - 三角形の表示
   - 空間のベクトル
   - 行列の定義
   - 行列の和・スカラー倍
   - 行列の積

ベクトル
スカラー量・ベクトル量

何のためにベクトルを使うか。

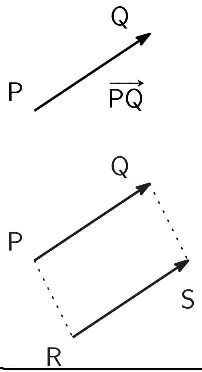
1. 図形の研究
2. 力学・工学のための数学的道具

$$
[\text{物理量}] = \begin{cases} [\text{スカラー量}] & : \text{実数で表される量} \\ & \quad \text{例：長さ, 時間, 質量, 温度, 電荷, 電位,} \cdots \\ [\text{ベクトル量}] & : \text{大きさと向きを持つ量} \\ & \quad \text{例：速度, 加速度, 力,} \cdots \end{cases}
$$

ベクトル

ベクトル

ベクトルの定義



図のような向きのついた線分を $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で表し ベクトル PQ とよぶ

P : 始点

Q : 終点

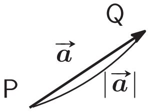
記号 $\vec{a}, \vec{b}, \cdots$ も用いる

ただし平行移動して重なるベクトルは同じものと考える。

ベクトル

ベクトルの大きさ・和

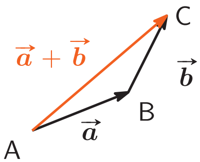
ベクトルの大きさ



$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のとき

線分 PQ の長さのことを $\vec{a}$ の大きさと定め, $|\vec{a}|$ で表す。

ベクトルの和の定義



$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

のときベクトルの和を

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

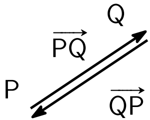
で定める。

ベクトル

ベクトルの和

[0 ベクトル]　：始点と終点が一致したベクトルを 0 ベクトルといい $\vec{0}$ で表す。

[逆ベクトル]



$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の逆ベクトルと定め
$-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で表す

[ベクトルの差]：$\vec{a}+(-\vec{b})$ を $\vec{a}-\vec{b}$ と書くことにする

ベクトルの和の性質

[0]：$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$,　　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$,

[I]　：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　(交換法則)

[II]　：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$　(結合法則)

ベクトル

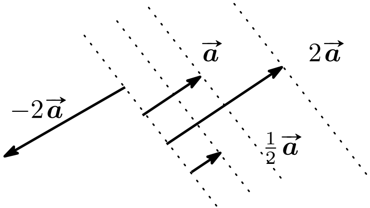
ベクトルのスカラー倍

ベクトルのスカラー倍の定義

m ： 実数 (スカラー)，　$\vec{\boldsymbol{a}}$ ： ベクトル とするとき，スカラー倍を

$$m\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{cases} \text{大きさ } |m||\vec{\boldsymbol{a}}| \text{ で } \vec{\boldsymbol{a}} \text{ と同じ向きのベクトル} & (m > 0 \text{ のとき}) \\ \vec{\boldsymbol{0}} & (m = 0 \text{ のとき}) \\ \text{大きさ } |m||\vec{\boldsymbol{a}}| \text{ で } \vec{\boldsymbol{a}} \text{ と反対向きのベクトル} & (m < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。



ベクトル

ベクトルのスカラー倍

ベクトルのスカラー倍の性質

m, n : 実数 (スカラー),　$\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$: ベクトル のとき

[III] : $m(n\vec{\boldsymbol{a}}) = (mn)\vec{\boldsymbol{a}}$,

[IV] : $(m+n)\vec{\boldsymbol{a}} = m\vec{\boldsymbol{a}} + n\vec{\boldsymbol{a}}$

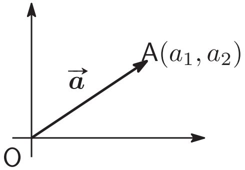
[V] : $m(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}) = m\vec{\boldsymbol{a}} + m\vec{\boldsymbol{b}}$

[VI] : $|m\vec{\boldsymbol{a}}| = |m||\vec{\boldsymbol{a}}|$

ベクトル

成分表示

ベクトルの成分表示の定義



$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, A$(a_1, a_2)$ のとき

$\vec{a} = (a_1, a_2)$

と表す．これを $\boldsymbol{a}$ の成分表示という．

ベクトルの成分による計算

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

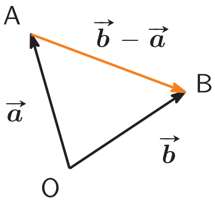
[I] : $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$

[II] : $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

[III] : $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

[VI] : $m\vec{a} = (ma_1, ma_2)$ (m はスカラー)

ベクトル
2 点を結ぶベクトル



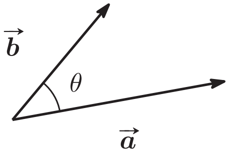
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$

A の座標 (a_1, a_2), B の座標 (b_1, b_2) のとき
$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ だから
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$

ベクトル

内積

内積の定義



$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi$ $)$ とするとき

内積 $\vec{a} \bullet \vec{b}$ を

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta, & (\vec{a} \neq \vec{\mathbf{0}}, \vec{b} \neq \vec{\mathbf{0}} \text{のとき}) \\ 0, & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

で定める。

内積はベクトルではなくスカラーであることに注意せよ

ベクトル
内積

内積の性質

[I] : $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2$

[II] : $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

[III] : $(m\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (m\vec{b}) = m(\vec{a} \bullet \vec{b})$ (m はスカラー)

[VI] : $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ (分配法則)

ベクトル

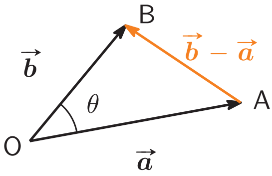
内積の成分表示

内積の成分表示

$$\vec{a} = (a_1, a_2),\ \ \vec{b} = (b_1, b_2) \ \Rightarrow\ \vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

内積の性質 [I], [II], [IV] を用いて

[確かめ]



$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

したがって

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

成分表示を用いて

$$= \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

ベクトル
ベクトルの平行・垂直

ベクトルの平行条件・垂直条件

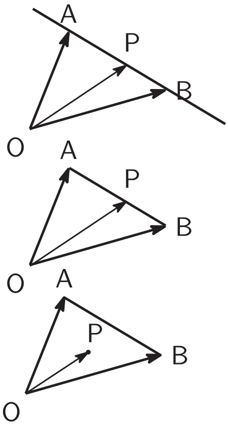
$\vec{\boldsymbol{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\boldsymbol{b}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ のとき

$\vec{\boldsymbol{a}} \parallel \vec{\boldsymbol{b}} \iff \vec{\boldsymbol{b}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$ となるスカラー m がある

$\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{b}} \iff \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = 0$

ベクトル
三角形の表示

三角形のベクトルによる表示



$\triangle$OAB において

[1] 点 P が直線 AB 上にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},$$
$$t + s = 1,$$

[2] 点 P が辺 AB 上にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},$$
$$t + s = 1,\ t \geqq 0,\ s \geqq 0$$

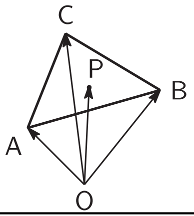
[3] 点 P が $\triangle$OAB の境界を含む内部にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},$$
$$t + s \leqq 1,\ t \geqq 0,\ s \geqq 0$$

ベクトル

三角形の表示

三角形のベクトルによる表示



O を原点とする．△ABC において

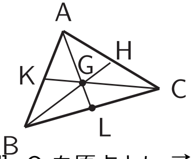
[3]　点 P が △ABC の境界を含む内部にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}},$$
$$t+s+r=1,\ t \geqq 0,\ s \geqq 0,\ r \geqq 0$$

ベクトル

三角形の表示

[例題　重心の存在]



△ABC において辺 AB の中点を K, 辺 AC の中点を H, 辺 BC の中点を L とすると, AL, BK, CH は一点 で交わることを示せ。この交点を重心という。

[略解]　O を原点とし $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．BK, CH の交点を G とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{a} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}$$

G は CH 上にあるから, ある数 t_1 があって

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = t_1\mathrm{OH} + (1 - t_1)\vec{c} = t_1\left(\vec{a} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}\right) + (1 - t_1)\vec{c}$$

G は BH 上にあるから, 同様にある数 t_2 があって

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = t_2\left(\vec{a} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\right) + (1 - t_2)\vec{b}$$

ベクトル
三角形の表示

2 式を比較して

$$t_1 \left(\vec{a} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2} \right) + (1 - t_1)\vec{c} = t_2 \left(\vec{a} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2} \right) + (1 - t_2)\vec{b}$$

これを整理して

$$\left(1 - t_1 - \frac{t_2}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \left(-1 + t_2 + \frac{t_1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は平行でないから

$$\left(1 - t_1 - \frac{t_2}{2}\right) = \left(-1 + t_2 + \frac{t_1}{2}\right) = 0$$

これを解いて $t_1 = t_2 = \dfrac{2}{3}$。したがって $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$
AL, BK の交点も同様の計算により同じ点になるから AL, BK, CH は 1 点で交わる。

ベクトル

空間のベクトル

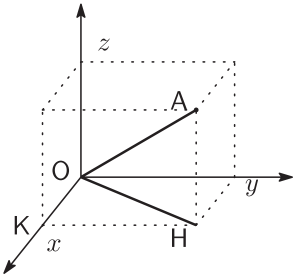
[空間のベクトル]

空間のベクトルも平面の場合と全く同じに定義される。

和・スカラー倍・内積も同様に定義される。

状況が変わるのは成分表示に関する部分。

ベクトル
空間のベクトル



[空間の点の距離]

(i) O と A(x, y, z) の距離

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

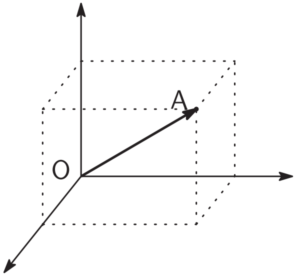
(ii) 2 点 P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2) の距離

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ベクトル

空間のベクトルの成分表示

空間のベクトルの成分表示



$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ のとき

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

と表す.

ベクトル

空間のベクトルの成分表示

ベクトルの成分による計算 (空間の場合)

$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

[I] : $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

[II] : $|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

[III] : $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

[VI] : $m\vec{\boldsymbol{a}} = (ma_1, ma_2, ma_3)$ (m はスカラー)

[V] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

平面の場合と全く同様である。

行列

行列の定義

行列の定義

行列 とは

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \cdots$$

のように数を長方形に並べたもの

成分 : 行列を作っている数

行 : 横に並んだ成分

列 : 縦に並んだ成分

行列

行列の定義

行列の表示

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

: m 行 n 列の行列, または $m \times n$ 行列 という。

i 行 j 列の成分を (i, j) 成分 といい a_{ij} で表す。

第 i 行, 第 j 列

a_{ij}

i, j を添字 (suffix) という。
左の添字は行番号, 右の添字は列番号を表す。

行列

行列の定義

[例]

$(a_1 \cdots a_n)$: n 次行ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$: n 次列ベクトル

も行列の一種と考える

行列

行列の和・スカラー倍

行列の和・スカラー倍

[和]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

同じ型の行列どうしでないとたし算できない

[スカラー倍]

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \qquad k : \text{実数}$$

ベクトルの和・スカラー倍と同じ考え方だから同じ性質を持つ

行列

行列の積の定義

行列の積の定義 (行ベクトル × 列ベクトルの場合)

$$(a_1\ a_2 \cdots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \left(= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)$$

次数が同じでないと定義できない

ベクトルの内積と同じである

行列

行列の積の定義

行列の積の定義 (一般の場合)

$l \times m$ 型行列と $m \times n$ 型行列の積は $l \times n$ 型行列であり

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ \\ a_{ij} & \cdots\cdots & a_{im} \\ a_{l1} & \cdots\cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1k} & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{mk} & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \vdots & c_{1n} \\ \cdots & c_{ik} & \cdots \\ c_{l1} & \vdots & c_{ln} \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} \left(= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} \right)$$

$$i = 1, \cdots, l, \quad k = 1, \cdots, n$$

で定める。c_{ij} は第 i 行ベクトルと第 j 列ベクトルの内積である。

行列

行列の積

行列の積の演算法則

A, B, C : 行列,　k : スカラー, 行列の積が定義されるとき

(I)　$k(AB) = (kA)B = A(kB)$

(II)　$(AB)C = A(BC)$

(III)　$A(B+C) = AB + AC$,　$(A+B)C = AC + BC$

(注意) $AB = BA$ はいつも成り立つとは限らない。

行列

特別な行列

0 行列・単位行列

すべての成分が 0 である行列

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

を **0** (ゼロ) 行列という。

n 行 n 列からなる行列を n 次正方行列という。とくに

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を n 次単位行列 といい $\boldsymbol{E}$ で表す。

行列

行列の積

0 行列の性質

(i) $A + 0 = 0 + A = A$

(ii) $A0 = 0, \ 0A = 0$

単位行列の性質

(i) A : $m \times n$ 行列, E : n 次単位行列
$\Rightarrow \quad AE = A$

(ii) A : $m \times n$ 行列, E : m 次単位行列
$\Rightarrow \quad EA = A$

行列の演算の性質は実数の演算の性質によく似ている。ただし

$AB = BA$ とは限らない

$AB = 0$ でも, $A = 0$ または $B = 0$ とは限らない