ガイダンス

(I) 建築デザイン数理基礎 およびフォローアップ (FP) クラス

目的：(A) 高校数学の微分積分直前までの知識を、

(i) 習っていない人はここで勉強してもらいます。

(ii) 知識が不確実であったり考え方が誤っている人（結構多い）はやり直してもらいます。

(B) 簡単な物理量の扱いと力学の初歩に触れてもらいます。

開講日・教室：2Q　火 1・2 時限 Nx-601　金 9・10 時限 スカイテリア

やりかたは

(i) 火曜日：前半 (約 50 分) の講義 と 問題演習。

(ii) 金曜日 FP(フォローアップ) クラス：問題演習。

ガイダンス

第 1 回	6 月 6 日 (火)	Nx-601	
第 1 回 (FP)	6 月 9 日 (金)	スカイテリア	確認テスト (記述式)
第 2 回	6 月 13 日 (火)	Nx-601	
第 2 回 (FP)	6 月 16 日 (金)	スカイテリア	
第 3 回	6 月 20 日 (火)	Nx-601	
第 3 回 (FP)	6 月 23 日 (金)	スカイテリア	
第 4 回	6 月 27 日 (火)	Nx-601	
第 4 回 (FP)	6 月 30 日 (金)	Nx-601 (訂正)	
第 5 回	7 月 4 日 (火)	Nx-601	
第 5 回 (FP)	7 月 7 日 (金)	スカイテリア	
第 6 回	7 月 11 日 (火)	Nx-601	
第 6 回 (FP)	7 月 14 日 (金)	スカイテリア	
第 7 回	7 月 18 日 (火)	Nx-601	
第 7 回 (FP)	7 月 21 日 (金)	スカイテリア	

ガイダンス

期末試験があります。あとで困ることのないようにフォローアップクラスにもきちんと出席して下さい。
演習は先輩学生（ピアサポーター）が指導してくれます。 友達同士でも学びあいましょう！

本日やること

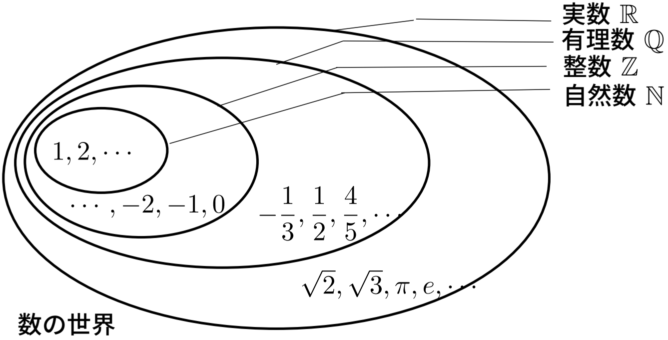
1. ガイダンス
2. 数
    - 実数と無限小数
    - 有理数と無理数
    - 平方根
    - 平方根の積と商
    - 分母の有理化
3. 文字と式
    - 変数
    - 未知数と方程式
    - 計算規則
    - 例題
    - 分数式
4. 「割合」と乗法・除法
5. 不等式
    - $<$ の性質
    - 区間
    - 1 次不等式
    - 2 次不等式

数

いろいろな数

[実数と無限小数]

いろいろな数を習いました。



数

いろいろな数

数の世界を広げてきた理由

$\Rightarrow$ 演算が自由にできるようにするため。

	たし算	ひき算	かけ算	わり算 (0 で割る以外)
自然数	○	×	○	×
整数	○	○	○	×
有理数	○	○	○	○
実数	○	○	○	○

では「有理数から実数へ」の拡張は何のため？

$\Rightarrow$ すべてのものの長さを表せるようにするため

このことを以下説明する。

数

無限小数

[実数とは何か、何のためにあるか]

正の実数

1. 自然数全体にすべての正の（有限または無限）小数を付け加えた集合を正の実数の集合とする。
2. 正の実数を使うと，いかなるものの長さをも表すことができる。

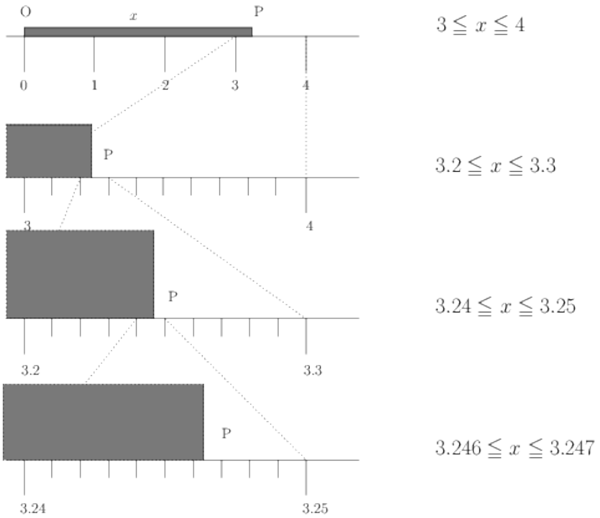
詳しくは

http://www.eds.it-hiroshima.ac.jp/koyama/MPSuppli/index.html

を見てください。

数

無限小数



これを無限に繰り返したとして
$x = 3.247\cdots$
としてよいだろう。

このように考えると
すべてのものの長さは無限小数で表すことができることになる。

数

有理数と無理数

[有理数と無理数]

実は有理数でない実数がある。これを**無理数**という。

正の実数

- 有限小数 (自然数を含む)
  $$0.33 = \frac{33}{100}$$
- 循環する無限小数
  $$0.33\cdots = \frac{1}{3}$$

（以上）有理数となる

- 循環しない無限小数　有理数とならない=無理数
  $$0.33030030003\cdots$$

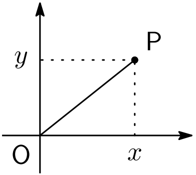
$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \cdots, \pi,\ e, \cdots$$

$\sqrt{2}$ が無理数であること，いいかえると $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}\quad (m, n = 1, 2, \cdots)$ と表すことが不可能であることは，高校数 I の教科書を見てください。

数

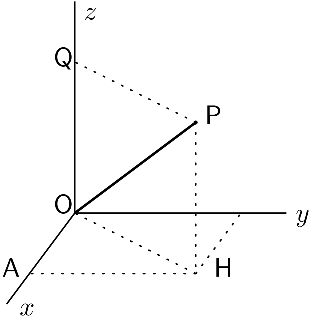
平方根

[点と原点の距離]　三平方の定理により



OP $= \sqrt{x^2 + y^2}$

Q(a, b) とすると
PQ$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$



OP $= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Q(a, b, c) とすると
PQ$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$

だから平方根は大事である。

数

平方根

平方根 $\sqrt{}$ の定義と性質

(i) 実数 a に対し $x^2 = a$ となる実数 x を a の**平方根**という。

(ii) $a > 0$ のとき, a の平方根のうち正のものを $\sqrt{a}$ で表す。(このとき $-\sqrt{a}$ も a の平方根となる。) すなわち

$$x = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a, \quad x > 0$$

(iii) $a = 0$ のときは平方根は 0 だけであり $\sqrt{a} = 0$ である.

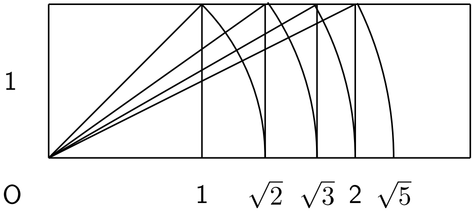
(iv) $a < 0$ のとき, a の平方根は実数の範囲では存在しない。(後に述べるが複素数になる。)

数

平方根

例：$\sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{2} = 1.414\cdots, \quad \sqrt{3} = 1.732\cdots,$

$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{5} = 2.236\cdots$



数

平方根の積と商

平方根の積と商

$a > 0,\ b > 0$ **のとき**　(i) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$,　(ii) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

[(i) の確かめ]

$$\text{左辺}^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab \quad \text{かつ左辺} > 0$$

だから 左辺 $= \sqrt{ab}$

[例] $\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = \left(\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ **は誤り**

数

平方根

$\sqrt{(-2)^2} = -2$ は誤り

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を使うと見通しが良くなることがある。

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \\
&= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

文字と式

変数・未知数

[文字で数を表すこと] 大変役に立つ考え方です。

1．文字が「何でもよい数」を表す場合，変数という。変数を含む式によっていろいろな量を表すことができる。

例：ある遊園地の入場料は大人 300 円子供 150 円である。
　大人の入場者数を表す変数を n (人),
　子供の入場者数を表す変数を m (人)
とすると入場料の総額は $300n + 150m$ (円) である。

変数にはいろいろな数を代入することができる。代入して得られる数を式の値という。

文字を含む式

未知数・変数

2．文字が「まだわかっていない数」を表す場合，未知数という。

例：ある遊園地の入場料は大人 300 円子供 150 円である。K 先生は一家 5 人で遊園地に行き入場料 1200 円を払った。このことは，家族のうちの大人の人数を n，子供の人数を m とすると

$$\begin{cases} n+m=5, \\ 300n+150m=1200 \end{cases}$$

のような等式で表すことが出来る。このような等式を方程式といい，これを満たす数を解という。

文字と式

計算規則

文字を含む式を数と同じように計算することができる。そのときの計算規則は数の性質と同じである。数を代入したとき矛盾すると困るからである。

(I) 演算に関する性質

a, b, c を任意の数または式とするとき

(i) 加法の交換法則 $a + b = b + a$

(ii) 加法の結合法則 $(a + b) + c = a + (b + c)$

(iii) 乗法の交換法則 $ab = ba$

(iv) 乗法の結合法則 $(ab)c = a(bc)$

(v) 分配法則 $a(b + c) = ac + bc$

が成り立つ。

文字と式

計算規則

(II) 等号に関する性質

a, b, c を任意の数または式とするとき

(i) $a = a$,

(ii) $a = b \Rightarrow b = a$

(iii) $a = b, b = c \Rightarrow a = c$

(iv) $a = b \Rightarrow$

$$a + c = b + c,\ a - c = b - c,\ ac = bc,\ \frac{a}{c} = \frac{b}{c}\ \text{(ただし } c \neq 0\text{)}$$

$$f(a) = f(b),$$

(ただし $f(x)$ は x を含む任意の式である。これを代入原理という。)

使ってよいルールはこれだけ!

式の計算
方程式

[例題] あるお金持ちが x 万円の財産を持っていた。そのうち 300 万円を 1 年の生活費に充てて、残りを投資して $\frac{4}{3}$ 倍に増やした。このことを 3 年繰り返したら財産が倍になった。(Newton より改変)

式で表すと

元の財産 x

1 年目の残高 $(x-300)\cdot\frac{4}{3}$

2 年目の残高 $((x-300)\cdot\frac{4}{3}-300)\cdot\frac{4}{3}$

3 年目の残高 $(((x-300)\cdot\frac{4}{3}-300)\cdot\frac{4}{3}-300)\cdot\frac{4}{3}$

だから $(((x-300)\cdot\frac{4}{3}-300)\cdot\frac{4}{3}-300)\cdot\frac{4}{3}=2x$

式の計算

方程式

分配法則より $x \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 300 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 300 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 300 \cdot \frac{4}{3} = 2x$

計算すると $\frac{64}{27}x - \frac{14800}{9} = 2x$

(II)(iv) より両辺から $2x$ を引いて $\frac{14800}{9}$ を加えても等号が成り立つから

$$\frac{64}{27}x - 2x = \frac{14800}{9}$$

分配法則より $\left(\frac{64}{27} - 2\right)x = \frac{14800}{9}$

計算すると $\frac{10}{27}x = \frac{14800}{9}$

(II)(iv) より両辺を $\frac{10}{27}$ でわっても等号が成り立つから

$$x = \frac{14800}{9} \div \frac{10}{27} = 4440$$

式の計算

おまけ

ニュートン：「文章の中に 数とか量の関係が出てくる問題を解くには，問題を英語またはその他の言語から量の間の関係を表すのに適した代数の言葉にほんやくする以外に何もする必要はない。」

ライプニッツ：「式が代わりに考えてくれる。」

子供時代のアインシュタイン：「おじさん。代数ってなあに？」
アインシュタインのおじさん：「ずるい算数だよ。」

文字と式

分数式

分数式の計算

分母分子に 0 でない同じ数や式をかけてもわってても値は変わらない。
二つの分数式をたす（ひく）には, 通分により分母を共通にして分子どうしをたす（ひく）。
分数式のかけ算は分母どうし, 分子どうしかける。
分数式のわり算は分母分子をいれかえてかける。

$\dfrac{4}{6a^2+1} = \dfrac{2}{3a^2+1}$ は誤り。

$\dfrac{4}{6a^2+1} = \dfrac{4 \times \frac{1}{2}}{(6a^2+1) \times \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3a^2+\frac{1}{2}}$ が正しい。

割合

わり算とかけ算に現れる量は性質の異なるものである。

$$\text{はやさ} = \frac{\text{みちのり}}{\text{じかん}}, \qquad \text{みちのり} = \text{はやさ} \times \text{じかん},$$

$$\text{(平均の) 速度} = \frac{\text{座標の変化量}}{\text{時間}}, \qquad \text{座標の変化量} = \text{(平均の) 速度} \times \text{時間},$$

一方、たし算に現れる量は同じ性質のもの。

A 地点から C 地点へのみちのり

=A 地点から B 地点へのみちのり +B 地点から C 地点へのみちのり

「割合」(わり算の結果出てくるもの) の計算には特別な規則がある。

A 地点 C 地点間の (平均の) はやさ

=A 地点 B 地点間のはやさ +B 地点 C 地点間のはやさ

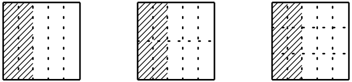
は誤り。

分数

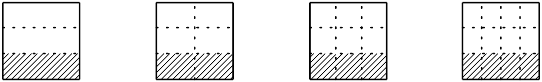
[(自然数の) 分数の計算]

分母分子に 0 でない同じ数をかけても値は変わらない。

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} \quad \cdots$$



$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} \quad \cdots$$



また、分母分子を 0 でない同じ数で割っても値は変わらない。これを約分という。

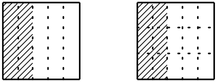
$$\frac{6}{15} = \frac{6 \div 3}{15 \div 3} = \frac{2}{5}$$

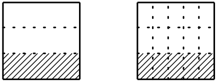
分数

通分

2 つの分数の分母を共通にすることができる。これを**通分**という。

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \qquad \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$$





分数

大小比較・たし算・ひき算

通分により２つの分数の大小比較・たし算・ひき算ができる。

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} > \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}$$

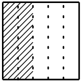
$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2+1}{5+3} = \frac{3}{8}$$ **は誤り**

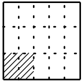
分数

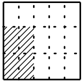
かけ算・わり算

分数のかけ算は分母どうし, 分子どうしかける。

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}\right) \times 2 = \frac{2 \times 2}{5 \times 3}$$







分数のわり算は分母分子をいれかえてかける。

分数式

変数を含む分数式は、自然数の分数と同じ規則で計算しなくてはならない。まとめると

分数 (式) の計算のまとめ

(i) 分母分子に 0 でない同じ数 (や式) をかけてもわっても値は変わらない。

(ii) 二つの分数式をたす（ひく）には, 通分により分母を共通にして分子どうしをたす（ひく）。

(iii) 分数式のかけ算は分母どうし, 分子どうしかける。

(iv) 分数式のわり算は分母分子をいれかえてかける。

分数式

[例題] (1) 10% の食塩水 100(g) に含まれる食塩は何 (g) か。

$$\text{食塩水の濃度} \div 100 = \frac{\text{食塩の重量}}{\text{食塩水全体の重量 (訂正)}} \quad \text{だから}$$

食塩の重量 $=$ 食塩水の濃度 $\times$ 食塩水全体の重量 (訂正) $\div 100 = 10(\mathrm{g})$

(2) 10% の食塩水 100(g) に 2% の食塩水を加えて 4% の食塩水を作るには, 2% の食塩水を何 (g) 加えればよいか。

加える食塩水の量を x(g) とする。

10% の食塩水 100(g) に含まれる食塩の量 $=$ 10(g)

2% の食塩水 x(g) に含まれる食塩の量 $= 0.02x$(g)

あわせてできる食塩水 $100+x$(g) に含まれる食塩の量 $= 10+0.02x$(g)

一方これが 4%であるから

$$\frac{10 + 0.02x}{100 + x} = 0.04$$

これを解いて $x = 300(\mathrm{g})$.

不等式

"$<$" の性質

"$<$" の性質

2 つの実数 a, b があるとき $a < b$, $a = b$, $a > b$ のどれか一つが成り立ち，任意の実数 a, b, c に対して

(i) $a < b, b < c \ \Rightarrow \ a < c$

(ii) $a < b \ \Rightarrow \ a + c < b + c, a - c < b - c$

(iii) $a < b, c > 0 \ \Rightarrow \ ac < bc, \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

$$a < b, c < 0 \ \Rightarrow \ ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

「$a < b$ または $a = b$」のことを $a \leqq b$ で表す．$<$ と同様な性質を持つ。

不等式
区間

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。
a, b を実数とするとき

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x \leqq b\} : a \leqq x \leqq b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x < b\} : a \leqq x < b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$
$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} : a < x \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$
$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqq b\} : x \leqq b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$

のような集合を区間という.

$[a,b]$ $\quad$ $[a,b)$ $\quad$ (a,∞) $\quad$ $(-\infty,b]$

不等式
1 次不等式

1 次不等式 $ax+b>0$ **の解は,** $a>0$ **のとき**

$$ax+b>0 \quad \Leftrightarrow \quad ax>-b \quad \Leftrightarrow \quad x>-\frac{b}{a}$$

だから $x>-\dfrac{b}{a}$**.　区間で表すと** $(-\frac{b}{a},\infty)$

$a<0$ **のとき**

$$ax+b>0 \quad \Leftrightarrow \quad ax>-b \quad \Leftrightarrow \quad x<-\frac{b}{a}$$

だから $x<-\dfrac{b}{a}$**.　区間で表すと** $(-\infty,-\frac{b}{a})$

不等式

2 次不等式

準備 1. 因数定理

多項式 $P(x)$ が $x-a$ で割り切れる $\iff$ $P(a)=0$

不等式

2 次不等式

準備 2. 二次方程式の解の公式

二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a,\ b,\ c\ \text{は定数}\quad a \neq 0)$$

の解は

(i) $b^2 - 4ac > 0$ **のとき** $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ **のとき** $\quad x = -\dfrac{b}{2a}$

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ **のとき 実数解を持たない。(後で述べるが複素数解を持つ)**

$b^2 - 4ac$ **を判別式といい** D **で表す.**

不等式

2 次不等式

$ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を $D = b^2 - 4ac$ とする。

2 次不等式の解

$D > 0$ のとき $ax^2 + bx + c = 0$ は二つの異なる実数解 $x = \alpha, \beta \ \ (\alpha < \beta)$ を持つが, $a > 0$ のとき

(i) $ax^2 + bx + c > 0$ の解は $x < \alpha$ または $x > \beta$

(ii) $ax^2 + bx + c < 0$ の解は $\alpha < x < \beta$

$D < 0$, $a > 0$ のとき $ax^2 + bx + c = 0$ は実数解を持たないので

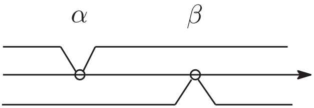
(i) $ax^2 + bx + c > 0$ の解はすべての実数 x

(ii) $ax^2 + bx + c < 0$ は解を持たない。

不等式

2 次不等式

[前半の確かめ]　因数定理により $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$



符号を調べると $a > 0$ **だから**

x	$x < \alpha$	α	$\alpha < x < \beta$	β	$\beta < x$
$x - \alpha$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - \beta$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$a(x-\alpha)(x-\beta)$	$+$	0	$-$	0	$+$

だから

(i)　$ax^2 + bx + c > 0$ **の解は** $x < \alpha$ **または** $x > \beta$

(ii)　$ax^2 + bx + c < 0$ **の解は** $\alpha < x < \beta$