# 建築デザイン数理基礎 第5回　解答

**問題 1.** 次の角を弧度法に直せ

$a$(rad)$= b^\circ$ のとき

$$b = \frac{a}{2\pi} \times 360, \qquad a = \frac{b}{360} \times 2\pi$$

だから

(1) $18^\circ$ は $\dfrac{18}{360} \times 2\pi = \dfrac{\pi}{10}$(rad)

(2) $54^\circ$ は $\dfrac{54}{360} \times 2\pi = \dfrac{3\pi}{10}$(rad)

(3) $315^\circ$ は $\dfrac{315}{360} \times 2\pi = \dfrac{7\pi}{4}$(rad)

**問題 2.** 次の角を度数法に直せ

(1) $\frac{3}{4}\pi$ (rad) は $\dfrac{\frac{3}{4}\pi}{2\pi} \times 360 = 135^\circ$

(2) $\frac{4}{5}\pi$ (rad) は $\dfrac{\frac{4}{5}\pi}{2\pi} \times 360 = 144^\circ$

(3) $\frac{2}{9}\pi$ (rad) は $\dfrac{\frac{2}{9}\pi}{2\pi} \times 360 = 40^\circ$

**問題 3.**

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^3$ を計算することによって 3 倍角の公式を導け。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^3 \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta & -3\sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta \\ 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta & \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これが

$$= \begin{pmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}$$

であるから成分を比較して

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \quad \sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$$

**問題 4.** (1) 半角の公式

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}, \quad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

を導け。

2 倍角の公式により

$$\cos\theta = \cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$
$$= 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$$

これを $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ について解くと

$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$。

$$\cos\theta = \cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

これを $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ について解くと

$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$。

(2) $\sin\frac{\pi}{8}, \cos\frac{\pi}{8}$ を求めよ。

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\cdot 2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2^2},$$
$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\cdot 2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2^2}.$$

$0 < \dfrac{\pi}{8} < \pi$ より $\sin\dfrac{\pi}{8} > 0$ かつ $\cos\dfrac{\pi}{8} > 0$. したがって

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad\qquad \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$