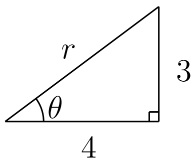
建築デザイン数理基礎 第5回　解答

問題 1. 次の直角三角形において r を求め, 角 θ の正弦, 余弦を求めよ。

(1)

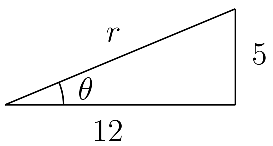


三平方の定理により $r^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ だから $r = 5$.

$\cos\theta = \dfrac{4}{5}, \quad \sin\theta = \dfrac{3}{5}.$

有名な直角三角形です。

(2)

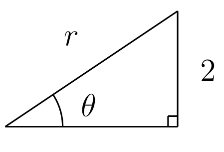


三平方の定理により $r^2 = 12^2 + 5^2 = 169$ だから $r = 13$.

$\cos\theta = \dfrac{12}{13}, \quad \sin\theta = \dfrac{5}{13}.$

有名な直角三角形です。

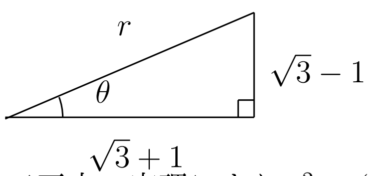
(3)



三平方の定理により $r^2 = 3^2 + 2^2 = 13$ だから $r = \sqrt{13}$.

$\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}.$

(4)

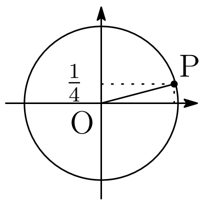


三平方の定理により $r^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 = 8$ だから $r = 2\sqrt{2}$.

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

じつは $\theta = 15^\circ$ です。

問題 2. (1) θ を鋭角とする. $\sin\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき $\cos\theta, \tan\theta$ を求めよ.



三角比は図のような原点中心半径 1 の円で考える。P は y 座標が $\frac{1}{4}$ であるような円周上の点とする。ただし θ が鋭角であるので第 1 象限にあるものとする。 x 座標は

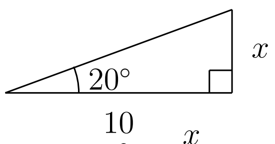
$$\mathrm{OP}^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

を解いて

$$x^2 = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \text{ したがって } \quad x = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

以上から $\cos\theta = x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}, \quad \tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{15}},$

(2) 図の x を求めよ。（電卓使用可）



$$\tan 20^\circ = \frac{x}{10}$$

だから

$$x = 10\tan 20^\circ = 3.639702343\ldots \fallingdotseq 3.6397$$

電卓で $\tan 20^\circ$ を求めるときは角を (弧度法ではなく) 度数法で表した三角比を用いなくてならないので注意すること。

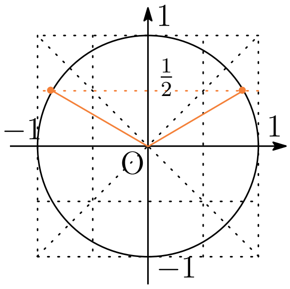
問題.3 (1) 空欄を埋めよ.

θ	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	定義できない	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

問題.4

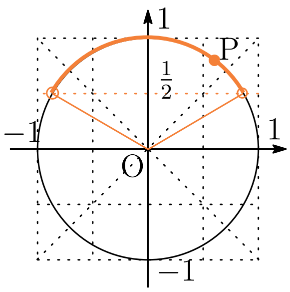
(1) $2\sin\theta = 1 \iff \sin\theta = \frac{1}{2}$

y 座標が $\frac{1}{2}$ となるような円周上の点は図のように 2 つある。**問題.3** の答えの表で $\sin\theta$ が $\frac{1}{2}$ となる角を探すと $\theta = 30^\circ$ と 150°。$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の間にはこの 2 つしかない。



電卓を使って $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ を求めると概数しかわからないのでよくない。誤差のない正確な値がわかる場合はそれを求めるべきである。

(2) $\sin\theta > \frac{1}{2}$



図において, P は単位円周上を A から角 θ 回転した点とする. このとき P の座標は $(\cos\theta, \sin\theta)$ である.

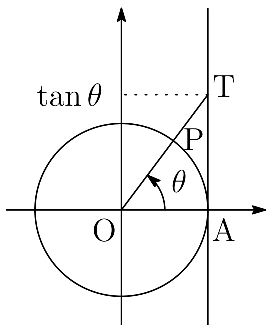
$$\sin\theta > \frac{1}{2}$$

であるとき P は図の太線の部分にあるので前問の結果を使って

$30^\circ < \theta < 150^\circ$.

であることが分かる.

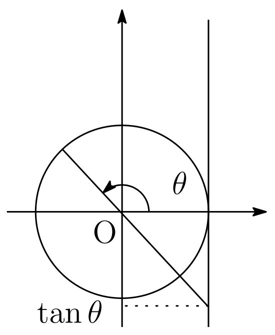
(3) $\sqrt{3}\tan\theta = -1$ をみたす θ の値を求めよ. ただし $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする.

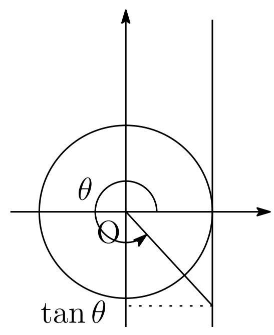


原点中心半径 1 の円に点 A(1, 0) で接線を引く。P を円周上 A から角 θ だけ回転した点とし, OP の延長線と接線の交点を T とする。
θ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき, OA= 1 だから

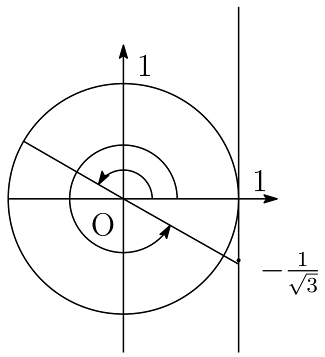
$$\tan\theta = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}} = \mathrm{AT}$$

だから T の y 座標が $\tan\theta$ となる。



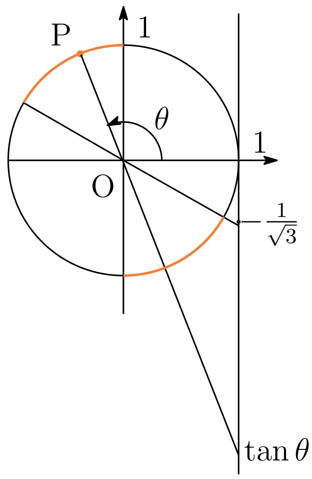


θ が 90° を超えるときも同様である。



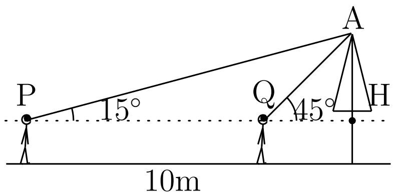
いま $\sqrt{3}\tan\theta = -1$ のとき $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるが, これを満たす θ は図より $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲では 2 つある。
問題 3 の結果を使ってひとつは 150° であることがわかるからもう一つは 330° である。

(4) $\sqrt{3}\tan\theta < -1$ をみたす θ の値の範囲を求めよ. ただし $0 \leqq \theta < 360^\circ$ とする.



$\tan\theta < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ は図のオレンジの部分にある。
したがって $90^\circ < \theta < 150^\circ$ と $270^\circ < \theta < 330^\circ$ である。

問題 5. (2018 年度入試問題) ある地点で木を見上げた角が 15° であった。そこからさらに 10m 近づいた地点から見上げると 45° であった。この木の高さを求めよ。ただし見上げる人の目の高さを 1.5m とする。



$\triangle$APQ において

PQ=10, $\angle \mathrm{PQA} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, $\angle \mathrm{PAQ} = 180^\circ - (15^\circ + 135^\circ) = 30^\circ$

である。正弦定理を使うと

$$\frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{\mathrm{AP}}{\sin 135^\circ}$$

これを解いて

$$\mathrm{AP} = \frac{10\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = 10\,\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{2}$$

一方余弦定理により

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{PQ}^2 + \mathrm{AQ}^2 - 2\mathrm{PQ}\mathrm{AQ}\cos 135^\circ$$

だから

$$200 = 100 + \mathrm{AQ}^2 - 20\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{AQ}$$

$$\mathrm{AQ}^2 + 10\sqrt{2}\mathrm{AQ} - 100 = 0$$

これの正の解は

$$\mathrm{AQ} = -5\sqrt{2} + \sqrt{150} = 5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

したがって

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AQ}\sin 45^\circ = -5 + 5\sqrt{3}$$

木の高さはこれに 1.5m を加えて

$$-5 + 5\sqrt{3} + 1.5 = -3.5 + 5\sqrt{3} \fallingdotseq 5.16025 \ (\mathrm{m})$$

(注意) 加法定理（高校数 II）を使って

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

が導ければ余弦定理なしで AQ が求められる。 他にもいろいろ方法がある。