建築デザイン数理基礎 第4回　解答

問題 1. 次の式を $a^{\square}$ の形に表せ.

(1) $a^3 \times a^4 = a^{3+4} = a^7$

(2) $a^3 \div a^4 = a^{3-4} = a^{-1}$

(3) $\sqrt[3]{a} \times (\sqrt{a})^3 = a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}\times 3} = a^{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}} = a^{\frac{11}{6}}$

(4) $\dfrac{\sqrt{a} \times \sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}} = a^0 = 1$

問題 2. 次の式を計算し簡単にせよ.

(1)

有理数べきに直して指数法則を使い

$\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{1}{3}}4^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 4^1 = 4$

(2)

有理数べきに直して指数法則を使い

$$\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}} = \frac{(2^5 \times 3)^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{(2^5)^{\frac{1}{5}}\,3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{2^{5\times\frac{1}{5}}\,3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 2^{5\times\frac{1}{5}}\,3^{\frac{1}{5}}\,3^{-\frac{1}{5}} = 2^{5\times\frac{1}{5}}\,3^{\frac{1}{5}-\frac{1}{5}} = 2^1\,3^0$$
$$= 2$$

(3)

有理数べきに直して指数法則を使い

$\left(\sqrt[4]{25}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{5^2}\right)^2 = \left(5^{\frac{2}{4}}\right)^2 = 5^{\frac{2}{4}\times 2} = 5^1 = 5.$

(4)

$\sqrt[3]{16} + \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = 2 \times 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = 3 \times 2^{\frac{1}{3}}.$

(5) $8^{-\frac{1}{2}} \div 4^{-\frac{1}{2}} = 2^{3\times(-\frac{1}{2})} \div 2^{2\times(-\frac{1}{2})} = 2^{-\frac{3}{2}} \div 2^{-1} = 2^{-\frac{3}{2}-(-1)} = 2^{-\frac{1}{2}}.$

(6) $\sqrt{48} - \sqrt{75} = \sqrt{3 \times 4^2} - \sqrt{3 \times 5^2} = 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -\sqrt{3}.$

問題 3. 次の値を求めよ.

(1) $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ だから $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$

(2) $3^{2} = 9$ だから $\log_3 9 = 2$

(3) $3^{1} = 3$ だから $\log_3 3 = 1$

(4) $3^{0} = 1$ だから $\log_3 1 = 0$

(5) $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$ だから $\log_2 \dfrac{1}{8} = -3$

(6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ だから $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

(7) $3^{\log_3 5} = M$ とおくと, $\log_3 M = \log_3 5$ だから真数を比較して $M = 5$.

(8) $\log_2\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = p$ とおくと, $2^p = 2^{\frac{1}{2}}$ だから指数を比較して $p = \dfrac{1}{2}$

問題 4 確かめよ. ただし $a > 0$, $M > 0$, $N > 0$, k は実数.

$\log_a\left(M^k\right) = k\log_a M$

[確かめ] $\log_a M = p$ とおく. $\log_a$ の定義により $a^p = M$ である. したがって両辺 k 乗して $M^k = (a^p)^k$ であるが, さらに指数法則により $(a^p)^k = a^{kp}$ である. だから $M^k = a^{kp}$ である. 再び $\log_a$ の定義により $\log_a\left(M^k\right) = kp = k\log_a M$ である.

問題 5. $x, y, z > 0$ のとき, $X = \log_a x$, $Y = \log_a y$, $Z = \log_a z$. 次の式を X, Y, Z で表せ. ただし, $a > 0$, $a \neq 1$ とする.

(1) $\log_a(x^3y^2z)$

$$= \log_a(x^3) + \log_a(y^2) + \log_a(z)$$

$$= 3\log_a(x) + 2\log_a(y) + \log_a(z)$$

$$= 3X + 2Y + Z$$

(2) $\log_a \dfrac{xy^2}{z^3}$

$$= \log_a(x) + \log_a(y^2) - \log_a(z^3)$$
$$= \log_a(x) + 2\log_a(y) - 3\log_a(z)$$
$$= X + 2Y - 3Z$$

問題 6. 次の等式を満たす x の値を求めよ.

(1) $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = x$

対数の定義より, $\sqrt{2}^{x} = 2\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ だから

右辺 $= (2^{\frac{1}{2}})^x = 2^{\frac{x}{2}}$.

左辺 $= 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$.

したがって指数を比較して, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{2}$, $x = 3$.

(2) $\log_3 x = -2$

定義より, $3^{-2} = x$.

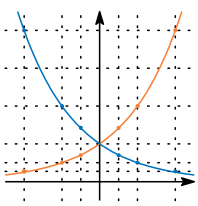
$3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ だから

$x = \dfrac{1}{9}$.

問題 7 (1) 空欄を埋めよ.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	4
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(2) $y = 2^x$, $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフを書け.

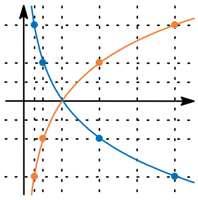


これらが y 軸に関して対称であることに注意せよ。それは $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ であることによる。一般に $y = f(x)$, $y = f(-x)$ のグラフは y 軸に関して対称である。

(3) 空欄を埋めよ.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2
$\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2

(4) $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを書け.



これらが x 軸に関して対称であることに注意せよ。それは $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$ であることによる。一般に $y = f(x)$, $y = -f(x)$ のグラフは x 軸に関して対称である。

問題 8　a, x, y, z を正の数とし, $a \neq 1$ とする. 次の式を簡単にせよ.

(1) $\log_3 4 - \log_3 12 = \log_3 \dfrac{4}{12} = \log_3 \dfrac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -\log_3 3 = -1.$

(2) $\log_2 3 \times \log_3 2 = 1.$

底の変換公式により $\log_3 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = \dfrac{1}{\log_2 3}.$

したがって $\log_2 3 \times \log_3 2 = 1.$

(3) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \times 3) = \log_6 6 = 1.$

(4) $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}.$

(5) $\log_3 \sqrt[3]{12} - \dfrac{2}{3}\log_3 2 = \log_3 \sqrt[3]{3 \times 2^2} - \log_3 2^{\frac{2}{3}} = \log_3 \left(\dfrac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}\right) = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}.$

問題 8　複利法により利率 r で期間 n だけ預けた預金の元利合計は元金の $(1+r)^n$ 倍である. 年利 5% で 10 万円を預けたとき元利合計が初めて 20 万円を超えるのは何年後か. (概数 $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$, $\log_{10} 1.05 \fallingdotseq 0.021189$ を用いよ.)

$(1.05)^n > 2$ となる最小の自然数 n を求めればよい. $\log_{10}$ は単調増加関数だから両辺の常用対数を取って

$$n \log_{10} 1.05 > \log_{10} 2$$

$\log_{10} 1.05 > 0$ だから両辺を $\log_{10} 1.05$ で割って

$$n > \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.05} \fallingdotseq \frac{0.3010}{0.021189} = 14.205...$$

だから 15 年.