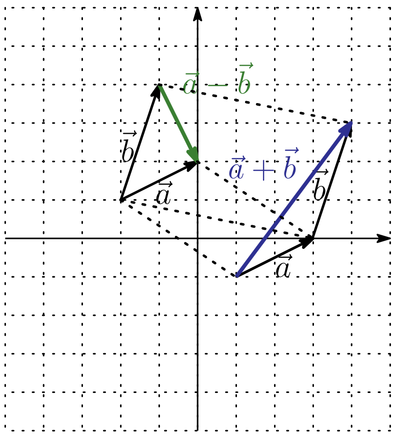
建築デザイン数理基礎 第3回　解説

問題 1.

(1)



図は一例である。平行移動してこれらと重なるものは正解。

(2)

$\vec{a} = (2, 1)$

$\vec{b} = (1, 3)$

$\vec{a} + \vec{b} = (2, 1) + (1, 3) = (2 + 1, 1 + 3) = (3, 4)$

$\vec{a} - \vec{b} = (2, 1) - (1, 3) = (2 - 1, 1 - 3) = (1, -2)$

(3) 次のものを求めよ。

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角の余弦を θ とすると

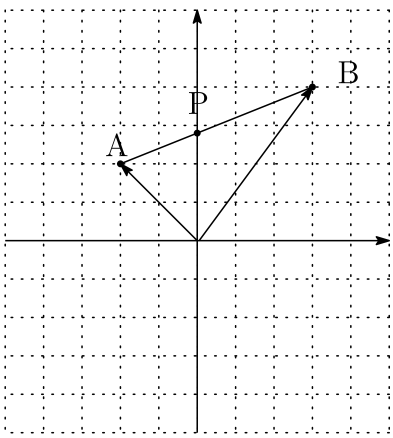
$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \vec{a}\bullet\vec{b} = 5$

より $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ したがって $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$\vec{a}\bullet(\vec{b}-\vec{a}) = (2,1)\bullet(-1,2) = 0$

$\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ のなす角の余弦は 0. したがって $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ は垂直.

問題 2 2 点 $\mathrm{A}(-2,2)$, $\mathrm{B}(3,4)$ に対し AB を $2:3$ に内分する点を P とする. P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表し, P の座標を求め図示せよ.



P が AB を 2:3 に内分するとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+3} = \frac{3}{5}(-2,2)+\frac{2}{5}(3,4)$$

$$= \left(\frac{3}{5}\times(-2)+\frac{2}{5}\times 3\ ,\ \frac{3}{5}\times 2+\frac{2}{5}\times 4\right)$$

$$= \left(0\ ,\frac{14}{5}\right)$$

問題 3.

図の三角形 △ABC において K, L, H は各辺の中点とする。$\overrightarrow{\mathrm{AL}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ を求めよ。

K は AB の中点だから $\qquad \overrightarrow{\mathrm{CK}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}})$

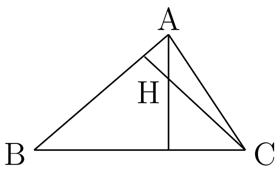
L は BC の中点だから $\qquad \overrightarrow{\mathrm{AL}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})$

H は CA の中点だから $\qquad \overrightarrow{\mathrm{BH}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}})$

加えて

$$\overrightarrow{\mathrm{CK}} + \overrightarrow{\mathrm{AL}} + \overrightarrow{\mathrm{BH}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

問題 4.



仮定より $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ である。$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ を示せばよい。

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}}$

より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot (-\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) + \overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

この点 H をこの三角形の垂心という。

問題 5.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1, 1, -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1, -1, -1)$

(2) $\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \dfrac{1}{3}$

$\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2\angle\mathrm{BAC}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\triangle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{2}$

問題 6. 2 軒のお店で 2 種の果物セットを 2 日間にわたって販売した。このとき、行列の考え方を使って売り上げの金額を計算したい。

[果物セットの内容]

	A セット	B セット
リンゴ	2	3
オレンジ	1	4
パイナップル	1	0

(ここに現れる行列を A とする。)

[各店売り上げ (1 日目)]

	1 号店	2 号店
A セット	5	7
B セット	8	4

(ここに現れる行列を B とする。)

このとき、

	1 号店	2 号店
リンゴ	c_{11}	c_{12}
オレンジ	c_{21}	c_{22}
パイナップル	c_{31}	c_{32}

とおくと $c_{11}, c_{12}, \cdots$ は

c_{11} = A セットのリンゴの数×1 号店の A セットの売り上げ+B セットのリンゴの数×1 号店の B セットの売り上げ $= 2 \times 5 + 3 \times 8 = 34$

c_{12} = A セットのリンゴの数×2 号店の A セットの売り上げ+B セットのリンゴの数×2 号店の B セットの売り上げ $= 2 \times 7 + 3 \times 4 = 26$

$\vdots$

のように計算される。これは行列の積のやり方であるから

$$C = AB$$

ということができる。

[各店売り上げ (2 日目)]

	1 号店	2 号店
A セット	8	10
B セット	5	9

(ここに現れる行列を D とする。)

[単価表]

リンゴ	オレンジ	パイナップル
100	70	300

(ここに現れる行列を F (訂正) とする。)

とするとき, 2 つの店の 2 日間の売り上げを表す行列を A, B, C, D, F (訂正) を用いて表すと

$F(C+AD)$ または $FA(B+D)$

問題 7.

(1)

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\\4&4&4&4\end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

計算してみてください。