

本日よりこと

① おしらせ

② 積分法の応用

- 平面図形の面積
- 立体の体積

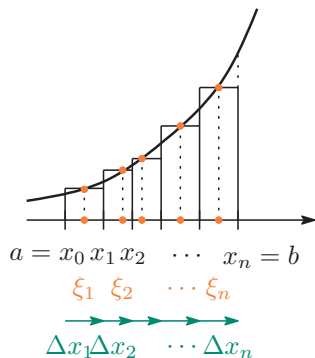
日程訂正

第1回	9月28日(木) 1・2時限	Nx-603	微分法
第1回(FP)	9月28日(木) 9・10時限	Nx-805	問題演習
第2回	10月5日(木) 1・2時限	Nx-603	微分法
第2回(FP)	10月5日(木) 9・10時限	スカイテリア	問題演習
第3回	10月12日(木) 1・2時限	Nx-603	微分法
第3回(FP)	10月12日(木) 9・10時限	スカイテリア	問題演習
第4回	10月19日(木) 1・2時限	Nx-603	微分法
第4回(FP)	10月19日(木) 9・10時限	スカイテリア	問題演習
第5回	10月26日(木) 1・2時限	Nx-603	微分法
第5回(FP)	10月26日(木) 9・10時限	スカイテリア	問題演習
第6回	11月2日(木) 1・2時限	Nx-603	積分法
第6回(FP)	11月2日(木) 9・10時限	スカイテリア	問題演習
第7回	11月9日(木) 1・2時限	Nx-603	積分法
第7回(FP)	11月9日(木) 9・10時限		中止
第8回	11月23日(木) 1・2時限	Nx-603	中間試験
第8回(FP)	11月23日(木) 9・10時限		中止

定積分

復習：定積分の定義

[復習：定積分の定義]



$$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

: 区間 $[a, b]$ の分割

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k, \quad k = 1, \dots, n$$

: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の代表の点

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n$$

: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の長さ

$$|\mathcal{P}| = \max_{k=1, \dots, n} |\Delta x_k|$$

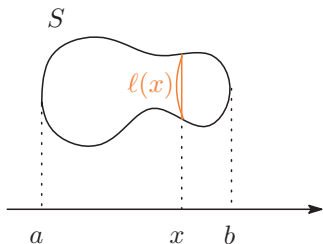
とすると

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (I)



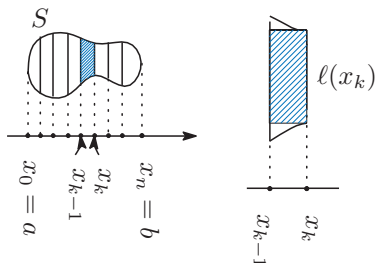
左図のような図形を、点 $(x, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線で切った切り口の長さを $l(x)$ とする. $l(x)$ が連続であるとき図形の面積 S は

$$S = \int_a^b l(x) dx$$

積分法的应用

平面図形の面積

[確かめ]



$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

とすると

$$k \text{ 番目の断片の面積} \doteq \ell(x_k) \times \Delta x_k$$

したがって

$$S \doteq \sum_{k=1}^n \ell(x_k) \Delta x_k$$

分割を細かくする極限をとると誤差は0に近づくことが分かっているので

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ell(x_k) \Delta x_k = \int_a^b \ell(x) dx$$

$\ell(x) dx$ は微小長方形の面積であることに注意せよ。

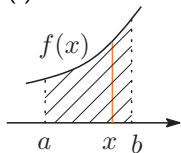
積分法の実用

平面図形の面積

平面図形の面積 (II)

$f(x), g(x)$: 連続, S : 斜線部分の面積

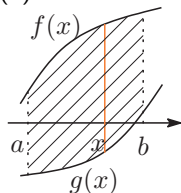
(i)



区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ であるとき, $l(x) = f(x)$ だから

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

(ii)



区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq g(x)$ であるとき, $l(x) = f(x) - g(x)$ だから

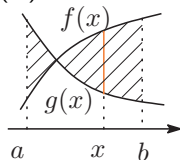
$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (II) 続き

(iii)



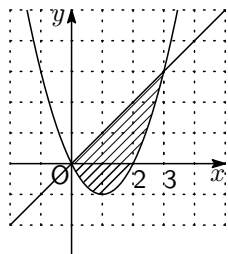
区間 $[a, b]$ で $f(x), g(x)$ の大小関係が一定でないときでも $\ell(x) = |f(x) - g(x)|$ だから

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

積分の応用

平面図形の面積

[例題] 関数 $y = x^2 - 2x \cdots (\star)$ のグラフである放物線と、 $y = x \cdots (\star 2)$ のグラフである直線で囲まれる図形の面積を求めよう。



(\star) は $y = x^2 - 2x = x(x - 2)$ だから $y = 0$ となるのは $x = 0$ または 2 のとき。だから x 軸との交点は $(0, 0)$ と $(2, 0)$ 。また $y = (x - 1)^2 - 1$ だから頂点が $(1, -1)$ の放物線である。

($\star 2$) は原点をとおり傾き 1 の直線。

交点の座標は連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = x \end{cases}$ をといて

$(0, 0)$ と $(3, 3)$ 。

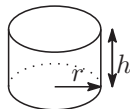
この図形は $0 \leq x \leq 3$ の範囲にあり、この範囲では ($\star 2$) が (\star) の上方にあるから面積は

$$\int_0^3 \{x - (x^2 - 2x)\} dx = \int_0^3 \{-x^2 + 3x\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

積分の応用

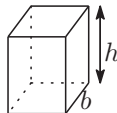
立体の体積

[円柱の体積]



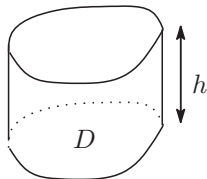
$$V = \pi r^2 h$$

[四角柱の体積]



$$V = abh$$

柱体の体積



$$V = Sh$$

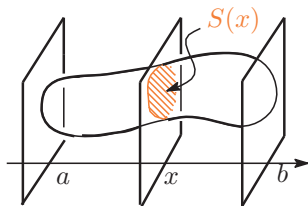
平面図形 D を垂直に h だけ平行移動して得られる立体を底面 D 高さ h の (直) 柱体という。
 D の面積を S とするときこの柱体の体積 V は

$$V = Sh$$

積分の応用

立体の体積

立体図形の体積



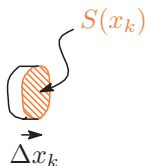
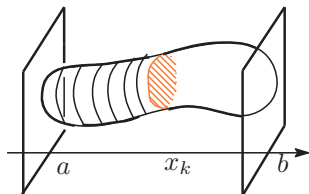
図のような立体図形を点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積を $S(x)$ とすると、体積 V は

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

積分の応用

立体の体積

[確かめ]



立体を分割 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ によって, x 軸に垂直な平面で薄切りにする。

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

とすると (直柱体で近似して)

$$k \text{ 番目の断片の体積} \doteq S(x_k) \times \Delta x_k$$

したがって

$$V \doteq \sum_{k=1}^n S(x_k) \Delta x_k$$

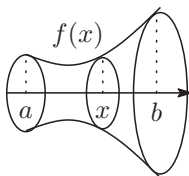
分割を細かくする極限をとると誤差は 0 に近づいていくことが分かっているので

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S(x_k) \Delta x_k = \int_a^b S(x) dx \quad (S(x) dx \text{ は微小柱体の体積である})$$

積分の応用

立体の体積

回転体の体積



曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ ($a < b$) で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

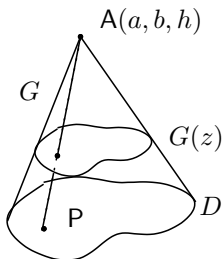
[確かめ]

立体を点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸と垂直な平面で切った切り口は半径 $|f(x)|$ の円であるから、その面積は $S(x) = \pi f(x)^2$ だから。

積分の応用

立体の体積

錐体の体積



D を xy 平面の閉領域とし、座標 (a, b, h) ($h > 0$) の点を A とする. このとき、 D の各点 P と A を結ぶ線分 AP をすべて集めてできる立体図形 G を、 D を底面、 A を頂点とする錐体という.
 G の体積 V は D の面積を S とするとき

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

である.

積分の応用

立体の体積

[確かめ] G を, 点 $(0, 0, z)$ を通り z 軸に垂直な平面で切った断面 $G(z)$ は D と相似で相似比は $h : h - z$, 面積比は $h^2 : (h - z)^2$ である. したがって $G(z)$ の面積 $S(z)$ は

$$S(z) = \left(\frac{h - z}{h} \right)^2 S$$

であり,

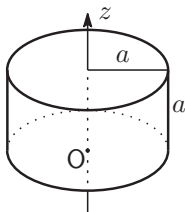
$$V = \int_0^h \left(\frac{h - z}{h} \right)^2 dz S = \frac{1}{3} Sh$$

である.

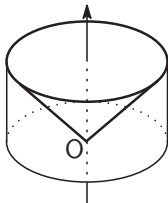
積分の応用

立体の体積

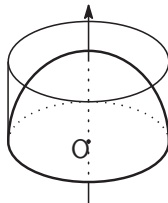
[例題]



(a)



(b)



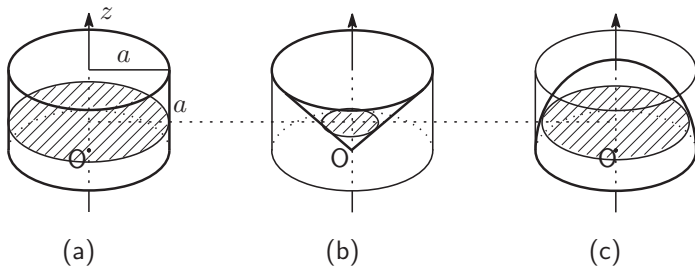
(c)

(a): 底面の半径 a , 高さ a の円柱, (b): それに内接する円錐, (c): 半径 a の球の上半部分である.

(a) の体積 V_a , (b) の体積 V_b , (c) の体積 V_c を求め, $V_a = V_b + V_c$ であることを確かめよ.

積分の応用

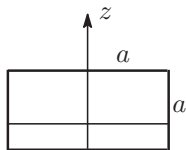
立体の体積



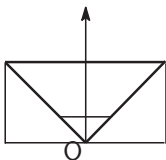
高さ z で切った切り口の面積をそれぞれ $S_a(z)$, $S_b(z)$, $S_c(z)$ とする

積分の応用

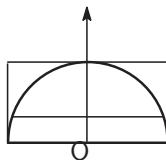
立体の体積



(a)



(b)



(c)

$$S_a(z) = \pi a^2, \quad S_b(z) = \pi z^2, \quad S_c(z) = \pi(a^2 - z^2)$$

だから

$$V_a = \int_0^a \pi a^2 dz = \pi a^3, \quad V_b = \int_0^a \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3} a^3,$$

$$V_c = \int_0^a \pi(a^2 - z^2) dz = \frac{2\pi}{3} a^3$$

これから $V_a = V_b + V_c$ がわかる。

積分の応用

立体の体積

実は, 任意の z に対して $S_a(z) = S_b(z) + S_c(z)$ であることから

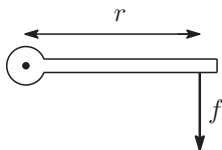
$$V_a = V_b + V_c$$

であることが (積分をしなくとも) 直ちに分かる.

積分の応用

力のモーメントと重心

力のモーメント



図の状況で左端の軸を時計方向に回そうとする力のモーメントは

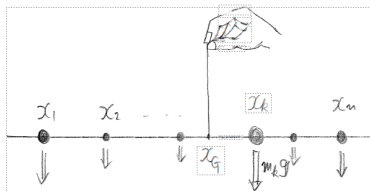
$$rf$$

である。

積分の応用

力のモーメントと重心

直線状に並ぶ質点系の重心



図のように棒の上に粘土の球を取り付けこれを質点と考える。各質点の座標は x_k 、質量は m_k ($k = 1, \dots, n$) とする。点 x_G のまわりの力のモーメントは $(x_k - x_G)m_k g$ 。 (g は重力加速度) この状態で釣り合っているとすると力のモーメントの和が 0 になるので

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_G)m_k g = 0$$

これをといて

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^n x_k m_k}{M}, \quad \left(\text{ただし } M = \sum_{k=1}^n m_k \right) \quad \text{これが重心の座標}$$

積分の応用

力のモーメントと重心

直線上に連続的に分布する質量の重心

棒の上に図のように連続的におもりを積んだときの重心の座標は

$$x_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{M},$$

$$\left(\text{ただし } M = \int_a^b f(x) dx \text{ は総重量} \right)$$