本日やること

1. 積分法
   - 復習：原始関数と不定積分
   - 定積分の考え方
   - 定積分の定義
   - 定積分の性質
   - 微分と積分の関係
   - 定積分の置換積分法

積分法

原始関数

復習：原始関数・不定積分の定義

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数 $\iff \dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$

$f(x)$ の 原始関数の 1 つを $F(x)$ で表すと，すべての原始関数は

$$F(x) + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

で表される．これを $f(x)$ の不定積分とよび

$$\int f(x)\,dx$$

で表す。定数 C を積分定数という．要するに

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

定積分法

初めに

[定積分:高校での定義]

$f(x)$ の a から b までの定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を

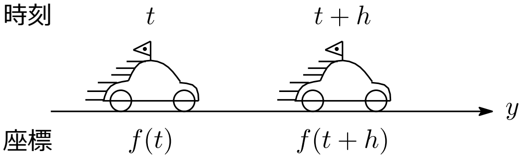
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{ただし } F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数}$$

によって 高校では 定めたのであった.
これでは $\displaystyle\int f(x)\,dx$ が計算できないとき困るので, 原始関数を用いない定義を考える.

定積分法

導入

動点の時刻 t での座標を $y = f(t)$ とする.



このとき

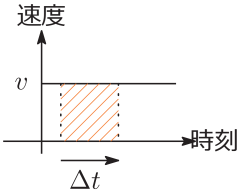
$$(\text{時刻 } t \text{ の}) \text{ 瞬間の速度 } v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt}$$

今回は逆に $v(t)$ から位置の変化 $f(b) - f(a)$ を知りたい.

定積分法

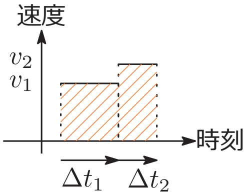
導入

[v = 一定の場合]　($v \geqq 0$ とする)



位置の変化量 $= v \times \Delta t = \square$ の面積

[v が変化する場合]

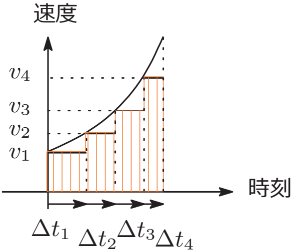


位置の変化量 $= v_1 \, \Delta t_1 + v_2 \, \Delta t_2 = \square$ の面積

定積分法

導入

[v が連続的に変化する場合]

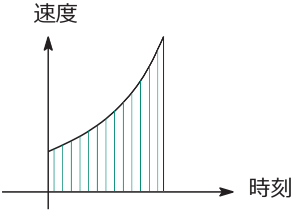


位置の変化量

$$\fallingdotseq v_1\,\Delta t_1 + v_2\,\Delta t_2 + v_3\,\Delta t_3 + v_4\,\Delta t_4$$

$=$ □の面積

$\downarrow$

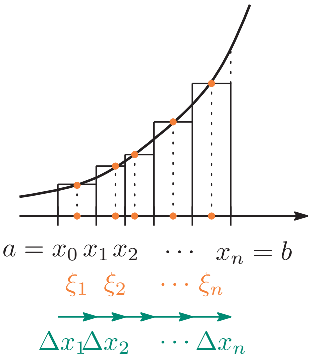


□の面積

定積分法

定積分の定義

この考え方に沿って定積分を定義する.



$y = f(x)$: 関数　$a < b$ とし,

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

: 区間 $[a, b]$ の分割

$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k,\ k = 1, \cdots, n$

: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の代表の点

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, \cdots, n$

: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の長さ

とする.

$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\cdots,n} |\Delta x_k|$ と定め分割 $\mathcal{P}$ の幅という.

定積分法
定積分の定義

定積分の定義 (I)

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

が $\{x_k\}$, $\{\xi_k\}$ の取り方によらず存在するとき, $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で積分可能であるという. この極限を $f(x)$ の a から b までの定積分とよび, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す. つまり

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \cdots (\star)$$

である. a を積分の下端, b を上端という.

定積分法

定積分の定義

定積分の定義 (II)

a を下端，b を上端とするとき，$a > b$ の場合も (⋆) で定義する．ただしこのとき

$$\mathcal{P} : a = x_0 > x_1 > \cdots > x_n = b$$
$$x_{k-1} \geqq \xi_k \geqq x_k,\ \ k = 1, \cdots, n$$
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}(\leqq 0),\ \ k = 1, \cdots, n$$

である．

したがって

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

定積分法

定積分の定義

[なぜこんな定義をするか]

多様な種類の関数の積分を計算したいので, ユルイ定義にした。

有界な閉区間 $[a, b]$ で連続な関数は積分可能であることが分かっている。

定積分法
定積分の定義

[例] 定数関数の場合。

$f(x) = c$, $a \leqq x \leqq b$ (c は定数) とすると, ξ_k によらず常に $f(\xi_k) = c$, $k = 1, \cdots, n$ だから

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c(b-a)$$

したがって

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

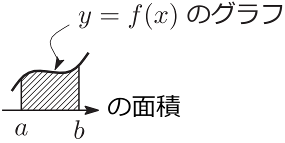
定積分法

定積分の性質

定積分の大事なこと

(I) $f(x)$ が $[a,b]$ で連続 $\Rightarrow$ $[a,b]$ で積分可能

(II) $f(x) \geqq 0$, $a < b$ のとき

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ 

の面積

(III) 数直線上の動点の時刻 t での座標を $y = f(t)$, 速度を $v(t)$ とすると

$\displaystyle\int_a^b v(t)\,dt = f(b) - f(a)$ (時刻 a から b までの位置の変化量)

定積分法

定積分の性質

定積分の性質

(i) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy$$

(ii) $$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(iii) $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$ (ただし k は x によらない定数)

定積分法

定積分の性質

定積分の性質 (続き)

(iv) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(v) 区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$

特に，$f(x) \geqq 0$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$

(vi) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$ (ただし $a < b$ の場合)

定積分法

微分と積分の関係

[目標]

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ただし $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数

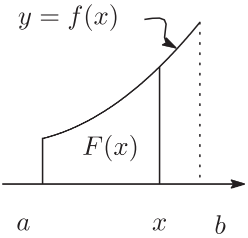
   高校ではこれが定義。今回はこれは定理。

2. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

定積分法

微分と積分の関係

微分積分学の基本定理



$f(x)$: $[a, b]$ で連続

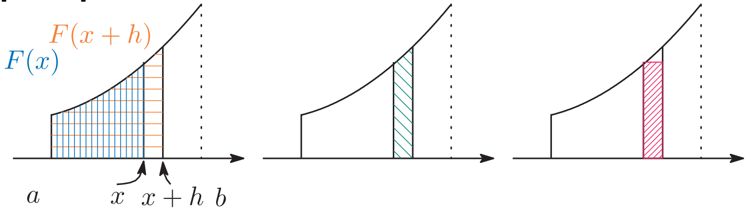
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$ とおくと $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数になっている．つまり連続関数は必ず原始関数を持つといってよい．ただし初等関数で表すことができるとは限らない。

定積分法

微分と積分の関係

[確かめ]



$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \fallingdotseq \frac{1}{h}\left(f(x)\times h\right) = f(x)$$

ここで $h \to 0$ とすると $\fallingdotseq$ が $=$ になるので

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

定積分法

微分と積分の関係

定積分と原始関数の関係

$f(x)$: $[a,b]$ で連続

$F(x)$: $f(x)$ の原始関数

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(\text{これを} = \Big[F(x)\Big]_a^b \text{と書く} \right)$$

[確かめ] $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと $f(x)$ の原始関数になっている．だからある定数 C があって

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

定積分法

微分と積分の関係

$x=a$ を代入して
$$0 = F(a) + C$$

$x=b$ を代入して
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + C$$

これから C を消去すればよい。

定積分法

微分と積分の関係

[例]

$$\int (1-x)\,dx = x - \frac{x^2}{2}$$

だから

$$\int_{-1}^{1} (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left((-1) - \frac{(-1)^2}{2}\right) = 2$$

$$\int_{0}^{1} (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \left(1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{2} (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = \left(2 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right) = 0$$

定積分法

定積分の部分積分

定理：定積分の部分積分法

$f(x)$, $g(x)$ ：共に微分可能， $f'(x)$, $g'(x)$: 共に連続であるとき

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

定積分法

定積分の部分積分

[確かめ]　不定積分の部分積分法は

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

移項して

$$\iff \int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx = f(x)g(x)$$

両辺定積分して

$$\Rightarrow \int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$$

移項して

$$\iff \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

定積分法

定積分の部分積分

[例題 6.3.4]　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$ を計算する.

$\displaystyle\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x$ であるから $\displaystyle\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \cos 2x$ したがって

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' dx = \left[x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

定積分法

定積分の置換積分法

定積分の置換積分法]

$x = \varphi(t)$: $[\alpha, \beta]$ 上で連続微分可能　$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

[確かめ]

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{とおくと} \Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = [F(\varphi(t))]_\alpha^\beta$$

$$= F(b) - F(a) \qquad = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

で一致する.

定積分法

定積分の置換積分法

[例題] $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $(a > 0$ は定数$)$ を求める。

$\left(\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}\right.$ は利用しない。$\Big)$

$x = a\,\sin t,\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．このとき $\cos t \geqq 0$ だから

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a\ \cos t$$

$\dfrac{dx}{dt} = a\ \cos t$ だから

$$dx = \frac{dx}{dt}\, dt = a\ \cos t\, dt,$$

定積分法

定積分の置換積分法

また

x が 0 から a まで動くとき t は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動く

となる．だから

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t\, dt$$

$\cos^2 t = \dfrac{\cos 2t + 1}{2}$ だから

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt = a^2 \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$