

本日よりこと

① 積分法

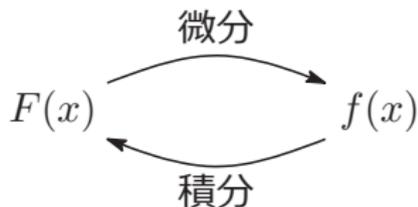
- 原始関数と不定積分
- 不定積分の置換積分法

積分法

初めに

[積分とは何か]

微分と逆の演算



[目的]

1. 微分方程式を解くこと。(不定積分)
2. 面積・体積・質量の計算。道のりの計算(定積分)

(逆に 密度の計算 速度の計算は微分法であった)

積分法

原始関数

原始関数の定義

$$F(x) \text{ が } f(x) \text{ の原始関数} \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

[例]

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^3 + 1) = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^3 - 5) = 3x^2, \dots$$

であるから $x^3, x^3 + 1, x^3 - 5, \dots$ は $3x^2$ の原始関数である。

積分法

原始関数はどれだけあるか

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ で表すと、そのほかの原始関数 $G(x)$ は適当な定数 C を用いて $F(x) + C$ で表される。

[確かめ]

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

であるが、

「ある区間で導関数の値が常に 0 \Leftrightarrow 関数は定数関数」(定理 5.9)

だから $F(x) - G(x)$ は定数関数となる。

積分法

不定積分

不定積分の定義

$f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とし、 C を任意の定数とすると、 $F(x) + C$ を $f(x)$ の不定積分とよび

$$\int f(x) dx$$

で表す。定数 C を積分定数という。不定積分を求めることを $f(x)$ を積分するという。

まとめると

微分と不定積分の関係

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \iff \int f(x) dx = F(x) + C$$

無数の原始関数を象徴的に1つの式で表したものと思ってほしい。

積分法

主な関数の不定積分

$$(i) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$(ii) \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

$$(iii) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(iv) \int \sin x dx = -\cos x + C = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$(v) \int \cos x dx = \sin x + C = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

今後積分定数 C は省略することにする。

積分法

主な関数の不定積分

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx}x^2 = x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{2} = x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{2} + C = \int x dx$$

$$\Leftrightarrow d\left(\frac{x^2}{2}\right) = x dx$$

$$\Downarrow$$

$$\Leftrightarrow \int d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \int x dx$$

積分法

主な関数の不定積分

[(i) の確かめ] $a \neq 0$ とする。 $a - 1 = \alpha$ とおくと $a = \alpha + 1$

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{a} \frac{d}{dx} x^{a-1} = x^{a-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x^a}{a} = x^{a-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^a}{a} + C = \int x^{a-1} dx$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \int x^\alpha dx$$

ただし $\alpha \neq -1$

積分法

主な関数の不定積分

[(ii) の確かめ] $\alpha = -1$ のときは $x^{-1} = \frac{1}{x}$ であるが特別あつかい。

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \log |x| + C = \int \frac{1}{x} dx$$

[(iv) の確かめ]

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

\Updownarrow

$$\frac{d}{dx} \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \sin x \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + C = \int \sin x dx$$

積分法

不定積分の性質：線形性

不定積分の性質：線形性

$$(i) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(ii) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ は定数})$$

積分法

不定積分の性質：線形性

[(i) の確かめ]

$$\int f(x) dx = F(x) + C_1 \text{とおく} \Rightarrow \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

$$\int g(x) dx = G(x) + C_2 \text{とおく} \Rightarrow \frac{d}{dx} G(x) = g(x)$$

↓

$$\frac{d}{dx} F(x) + \frac{d}{dx} G(x) = f(x) + g(x)$$

∥

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &\Leftarrow \frac{d}{dx} (F(x) + G(x)) = f(x) + g(x) \\ &= F(x) + G(x) + C_3 \end{aligned}$$

積分法

不定積分の置換積分法

[複雑な関数の積分法]

不定積分の定義

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x) dx = F(x) (+C) \cdots (\star)$$

したがって

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{4} \right) = x^3 \text{ だから } \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$$

でも

$$\int (2x + 3)^3 dx = \frac{(2x + 3)^4}{4} \quad \text{は誤り}$$

積分法

不定積分の置換積分法

正しくは、 $2x + 3 = t$ とおくと合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(2x + 3)^4}{4} \right) = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^4}{4} \right) = 2 \cdot t^3 = 2 \cdot (2x + 3)^3$$

$$\text{だから } \int 2 \cdot (2x + 3)^3 dx = \frac{(2x + 3)^4}{4}$$

$$\text{だから } \int (2x + 3)^3 dx = \frac{(2x + 3)^4}{2 \cdot 4}$$

積分法

不定積分の置換積分法

[一般化]

$$\int f(x) dx = F(x)$$

のとき x を $\varphi(x)$ でおきかえると $\varphi(x) = t$ とおいて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} (F(\varphi(x))) = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} F(t)$$

(*) より $\frac{d}{dt} F(t) = f(t)$ だから

$$= \varphi'(x) f(t) = \varphi'(x) f(\varphi(x))$$

だから

$$\int \varphi'(x) f(\varphi(x)) dx = F(\varphi(x)) = F(t) = \int f(t) dt$$

積分法

不定積分の置換積分法

まとめると

定理：不定積分の置換積分法

(i) 関数 $f(x)$ が原始関数を持ち、 $t = \varphi(x)$ が微分可能であるとき

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

(ii) $x = \psi(t)$ が微分可能であるとき

$$\int f(x) dx = \int f(\psi(t))\psi'(t) dt.$$

(i), (ii) により x の関数の x による積分を t の関数の t による積分に置き換えること、(あるいはその逆) を **積分変数の変換** または **置換積分法** という。

(ii) は (i) で x を t に、 φ を ψ に置き換えたもの。

積分法

不定積分の置換積分法

[置換積分法の考え方] (i) も (ii) も次のことをしている。

(I) $t = \varphi(x)$ または $x = \psi(t)$ となる変数 t を考え、
 $\varphi(x)$ を t で、または x を $\psi(t)$ でおきかえる。

(II) (i) の場合 $t = \varphi(x)$ を x で微分して $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$, 両辺に $\frac{dx}{\varphi'(x)}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{\varphi'(x)},$$

(ii) の場合 $x = \psi(t)$ を t で微分して $\frac{dx}{dt} = \psi'(t)$, 両辺に dt をかけて

$$dx = \psi'(t)dt,$$

(III) 以上により x, dx を t, dt でおきかえる。

このおきかえで $\int (t \text{ の関数}) dt$ の形になると、積分がうまくいく場合がある。

積分法

不定積分の置換積分法

[例 1] $\int (2x + 3)^3 dx$ を計算する。

$$2x + 3 = t \cdots \spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{2}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{2} \cdots \heartsuit$$

\spadesuit, \heartsuit で置き換えて

$$\int (2x + 3)^3 dx = \int t^3 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{1}{2} \frac{t^4}{4} = \frac{(2x + 3)^4}{8}$$

積分法

不定積分の置換積分法

[例 2] $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$ を計算する。

$$x^2 + 1 = t \cdots \spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{2x}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{2x} \cdots \heartsuit$$

\spadesuit, \heartsuit で置き換えて

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x}{t} \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log t = \frac{1}{2} \log |x^2 + 1|$$

積分法

不定積分の置換積分法

[例 3] $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$ を計算する。

$$\sin x = t \cdots \spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{\cos x}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{\cos x} \cdots \heartsuit$$

\spadesuit, \heartsuit で置き換えて

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{\cos x}{1 + t} \frac{dt}{\cos x} = \int \frac{1}{1 + t} dt = \log |1 + t| = \log |1 + \sin x|$$