本日やること

- 逆関数の微分法
- 指数関数・対数関数の導関数
- 対数微分法
- 三角関数の導関数

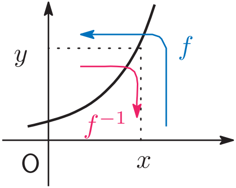
初等関数の導関数

逆関数の微分法

逆関数

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ x & \longmapsto & y \end{array}$$

$$y = f(x)$$



X : f の定義域
$Y = f(X)$: f の値域 のとき

関数 f が 1 対 1 であるとは

「$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$」であること。

このとき

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

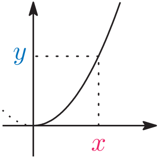
で決まる関数

$$f^{-1} : Y \to X$$

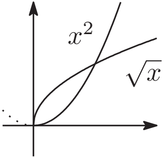
を f の逆関数という.

初等関数の導関数

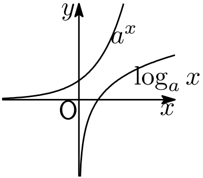
逆関数の微分法



[例]
$y = x^2$, $(x \geqq 0)$ の逆関数は $x = \sqrt{y}$
変数 x, y をとりかえて $y = \sqrt{x}$ と表す必要は必ずしもない。



変数を取り換えて $y = \sqrt{x}$ とすると，二つの関数のグラフは $y = x$ に関して対称になる。



$a > 0$, $a \neq 1$ とする。
$y = a^x$ の逆関数は $x = \log_a y$, $(y > 0)$
変数を取り換えて $y = \log_a x$ とすると，二つの関数のグラフは $y = x$ に関して対称になる。

初等関数の導関数

逆関数の微分法

逆関数の微分法

(i)　関数 $y = f(x)$ が区間 I で連続かつ狭義単調であるとすると逆関数が存在して連続である.

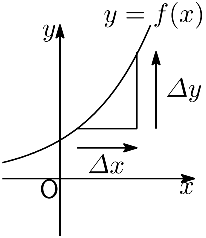
(ii) さらに $f(x)$ が I で微分可能で $f'(x) \neq 0$ ならば, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ も $f(I)$ で微分可能で次が成り立つ：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

初等関数の導関数

逆関数の微分法

[確かめ]　(i) は省略。(ii) は



$\Delta x (\neq 0)$: x の増分

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$: y の増分.

とすると

$$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$$

で f^{-1} は連続だから $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

だからここで $\Delta x, \Delta y \to 0$ とすると　$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

ネイピアの数 e

次の極限が存在する:

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

この極限の値 e はネイピアの数とよばれ, 無理数である。円周率 π と並んで最重要の定数である。

$$e = 2.718281828459\cdots$$

である。

初等関数の導関数

べき関数の導関数

二項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_n a^n + {}_n\mathrm{C}_{n-1} a^{n-1} b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_0 b^n \quad = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \, a^{n-k} b^k$$

[確かめ]　$(a+b)^n$ を展開すると

$$\begin{array}{ccccc} (a+b) & (a+b) & (a+b) & \cdots & (a+b) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ a & b & a & \cdots & a \end{array} \quad \text{取り出す}$$

のように各 $(a+b)$ から a, b の一方を取り出してかけ合わせたものの総和になる。

a を k 個 b を $n-k$ 個取り出す場合の数は ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ だから正しい。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

以下 (i), (ii) を確かめる。

(Step 1)　$0 < a \leqq b$ ならば $\dfrac{a}{b} \leqq \dfrac{a+1}{b+1}$。

(Step 2)　数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は単調増加。なぜなら 2 項定理により

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!\,n^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n}\,\frac{1}{k!}$$

$$\leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n+1} \times \frac{n+1-1}{n+1} \times \cdots \times \frac{n+1-k+1}{n+1} \times \frac{1}{k!}$$

$$\leqq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n+1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \times \cdots \times \frac{n-k+2}{n+1} \times \frac{1}{k!} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

(Step 3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqq 3$. なぜなら $k=1,\ldots,n$ のとき $k! \geqq 2^{k-1}$ であるから

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\,\frac{1}{k!}\\ &\leqq 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1+\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}\\ &< 1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=3\end{aligned}$$

(Step 4) 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は有界かつ単調増加だから収束する。(教科書 47 ページまたはスライド第 1 回) これで (i) がわかった。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

(Step 5) $x \to +0$ の場合に (ii) を示す．$n \leqq \dfrac{1}{x} < n+1$ となる自然数 n をとる．
$t \mapsto (1+x)^t$ は t について単調増加であり $\dfrac{1}{n+1} < x \leqq \dfrac{1}{n}$ だから

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+x)^n \leqq (1+x)^{\frac{1}{x}} < (1+x)^{n+1} \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

である．ここで $x \to +0$ とすると $n \to \infty$ となるので

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to e \times 1 = e,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e \times 1 = e$$

となる．したがって，はさみうちの原理により $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ も e に収束することがわかった．$x \to -0$ の場合は教科書 56 ページを見てください．

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

定理 4.11　対数関数の導関数

(i) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x > 0)$

(ii) $(\log |x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x \neq 0)$

[(i) の確かめ]　左辺 $= \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$ であり

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x} \frac{x}{h} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \log \left\{ \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right\} \to \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

[(ii) の確かめ]　$x > 0$ のとき：$|x| = x$ であるから (i) と同じ。
$x < 0$ のとき：$t = -x$ とおくと $|x| = t > 0$ であるから合成関数の微分法により

$$(\log |x|)' = \frac{d\ \log t}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \times (-1) = \frac{1}{x}.$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

定理 4.12　指数関数の導関数

$$(e^x)' = e^x$$

[確かめ]
$y = e^x$ とおく．$x = \log y$ であるから逆関数の微分法により

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\log y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = e^x,$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

[例]

(i) $(e^{ax})' = ae^{ax}$ $(a$; 定数)

(ii) $(a^x)' = a^x \log a$ $(a$: 1 でない正の定数)

[(i) の確かめ] $ax = t$ とおき合成関数の微分法を使うと

左辺 $= \dfrac{d}{dx}e^{ax} = \dfrac{d}{dt}e^t \times \dfrac{dt}{dx}$

定理 4.12 より $\frac{d}{dt}e^t = e^t$ だから

$= e^t \times a = a\,e^{ax} =$ 右辺.

[(ii) の確かめ] $a = e^{\log a}$ だから $a^x = e^{x\log a}$. これと (i) により

左辺 $= e^{x\log a}\log a =$ 右辺

$(a^x)' = a^x$ となるのは $a = e$ のときだけである。

初等関数の導関数

対数微分法

定理 4.13　対数微分

関数 $f(x)$ が微分可能であるとき,

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

[確かめ]　$t = f(x)$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \left(\frac{d}{dt}\log|t|\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

初等関数の導関数

対数微分法

[例] $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α : 実数の定数) の証明。

$y = x^\alpha$ とおき両辺の対数をとると,

$$\log y = \log x^\alpha = \alpha \ \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

したがって

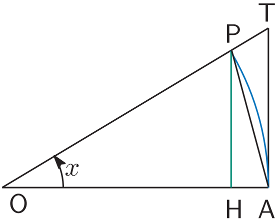
$$y' = \frac{\alpha}{x} \times y = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

初等関数の導関数

三角関数の導関数

三角関数の基本極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



[確かめ] $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $x\to +0$ とする.

PH$=\sin x$, 弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PA}}=x$, TA $=\tan x$

△OPA, 扇型 OPA, △OTA の面積を比較

$$0<\frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\tan x \quad \left(=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

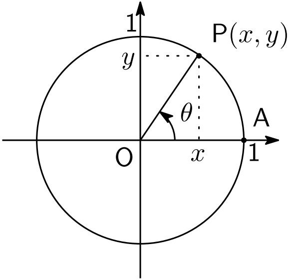
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

$\cos x\to 1$ であるからはさみうちの原理により $\frac{\sin x}{x}\to 1$ $\quad x\to -0$ の場合も同様.

初等関数の導関数

三角関数の導関数

復習　三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1,0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし, P の座標を (x,y) とするとき

$\cos\theta = x$: 余弦

$\sin\theta = y$: 正弦

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$: 正接

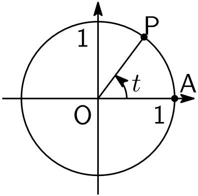
と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

また, これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という.

初等関数の導関数

三角関数の導関数

等速円運動



動点 P は原点中心半径 1 の円周上を角速度 1 (rad/sec) で回転している。

$t = 0$ のとき P=A

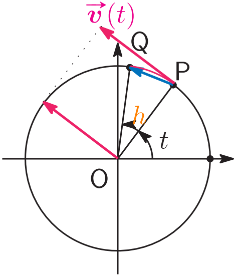
ならば

時刻 t の P の座標 $= (\cos t, \sin t)$

初等関数の導関数

三角関数の導関数

等速円運動の速度ベクトル



P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を

$$\vec{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h}$$

で定める。ただし

P : 時刻 t の点,　Q : 時刻 $t+h$ の点

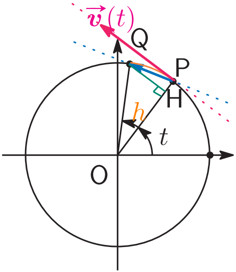
このとき

$$\vec{v}(t) = \left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= (-\sin t, \cos t) \cdots (\star)$$

初等関数の導関数

三角関数の導関数



[確かめ] (i) $\vec{v}(t)$ の向きは接線方向で正の回転の向きである．なぜなら直線 PQ は $h \to 0$ のとき接線に近づくから。

(ii) $\vec{v}(t)$ の大きさは 1 である．なぜなら

$$\frac{\mathrm{QH}}{h} = \frac{\sin h}{h} \leqq \left| \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h} \right| \leqq \frac{\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}}{h} = 1$$

かつ $\dfrac{\sin h}{h} \to 1$ だから。

(i), (ii) より $\vec{v}(t)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos t, \sin t)$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したものだから $(\star)$ がわかる.

初等関数の導関数

三角関数の導関数

一方, $\mathsf{P}(\cos t, \sin t)$, $\mathsf{Q}(\cos(t+h), \sin(t+h))$ だから

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{\mathsf{PQ}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\cos(t+h)-\cos t, \sin(t+h)-\sin t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(t+h)-\cos t}{h}, \frac{\sin(t+h)-\sin t}{h}\right)\\ &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(t+h)-\cos t}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{\sin(t+h)-\sin t}{h}\right)\\ &= ((\cos t)', (\sin t)')\end{aligned}$$

でもあるから, $(\star)$ と比較して

$$((\cos t)', (\sin t)') = (-\sin t, \cos t)$$

同様にして, 等速円運動に限らず時刻 t での座標が $(f(t), g(t))$ である動点 P の速度ベクトルは成分表示すると

$$\vec{v}(t) = (f'(t), g'(t))$$

となることがわかる。

初等関数の導関数

三角関数の導関数

三角関数の導関数

(i) $(\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$

(ii) $(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

[確かめ]　前節より明らか。