本日やること

1. 微分法
   - 合成関数の微分法
   - 関数の増減・極値

微分法
合成関数の微分法

復習：合成関数の微分法

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "t = g(x)"'] \arrow[rr, mapsto, bend left, "y = f(g(x))"] & t \arrow[r, mapsto, "y = f(t)"'] & y \\
\mathit{\Delta} x & \color{teal}{\mathit{\Delta} t} & \color{blue}{\mathit{\Delta} y}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\color{blue}{\mathit{\Delta} y}}{\Delta x} & = & \dfrac{\color{blue}{\mathit{\Delta} y}}{\color{teal}{\mathit{\Delta} t}} & \times & \dfrac{\color{teal}{\mathit{\Delta} t}}{\Delta x} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\dfrac{\color{blue}{dy}}{dx} & = & \dfrac{\color{blue}{dy}}{\color{teal}{dt}} & \times & \dfrac{\color{teal}{dt}}{dx}
\end{array}
$$

関数　$t = g(x)$, $y = f(t)$
合成関数　$y = f(g(x))$ がある。
x が $\mathit{\Delta} x$ だけ変動するとき
　t は $\mathit{\Delta} t$, y は $\mathit{\Delta} y$
だけ変動するものとする。

$\dfrac{dy}{dx}$ ：合成関数 $x \to y$ の導関数

$\dfrac{dy}{dt}$ ：$t \to y$ の導関数

$\dfrac{dt}{dx}$ ：$x \to t$ の導関数

の関係は図の通り。

初等関数の導関数

合成関数の微分法

[例題] (1) $y=\sqrt{x^2+1}$ の導関数を求めよう。
$t=x^2+1$ とおく. 関数 $y=\sqrt{x^2+1}$ は

$$y=\sqrt{t}\cdots(A),$$
$$t=x^2+1\cdots(B)$$

の合成関数である.

(B) より $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}(x^2+1)=2x$

(A) より $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}\sqrt{t}=\dfrac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

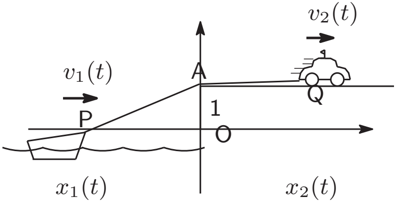
である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

となる.

微分法
合成関数の微分法

[例題]　(2)　ボートと自動車が図のような位置関係にあるとき, ボートの速度 $v_1(t)$ と自動車の速度 $v_2(t)$ の関係を述べよ.



P, Q の x 座標を $x_1(t)$, $x_2(t)$ とする。(時刻 t の関数である。)

$$v_1(t) = (x_1(t))', \quad v_2(t) = (x_2(t))'$$

$$\mathrm{AP} = \sqrt{x_1(t)^2 + 1}$$

$$\mathrm{AQ} = x_2(t)$$

$$\mathrm{AP} + \mathrm{AQ} = \text{一定}$$

微分法
合成関数の微分法

両辺 t で微分して

$$\frac{d}{dt}\sqrt{x_1(t)^2+1}+\frac{dx_2}{dt}=0$$

$x_1=s$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dt}\sqrt{x_1(t)^2+1}=\frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\sqrt{s^2+1}=x_1'(t)\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}=v_1(t)\frac{x_1(t)}{\sqrt{x_1(t)^2+1}}$$

$$=-v_1(t)\frac{\mathsf{OP}}{\mathsf{AP}}$$

$$\frac{dx_2}{dt}=v_2(t)$$

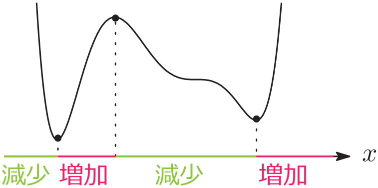
以上から

$$v_1(t)=\frac{\mathsf{AP}}{\mathsf{OP}}v_2(t)$$

微分法の応用

関数の増減・極値

[目標]



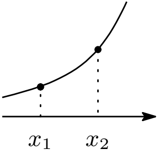
関数がどこで極値をとるかを知りたい。

微分法

関数の増減・極値

関数の増減

[単調増加]



関数 $f(x)$ が区間 I で単調増加であるとは

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leqq f(x_2)$$

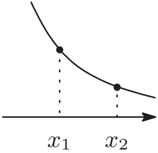
であること。

狭義単調増加であるとは

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2)$$

であること。

[単調減少]



関数 $f(x)$ が区間 I で単調減少であるとは

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \geqq f(x_2)$$

であること。

狭義単調減少であるとは

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_2)$$

であること。

微分法

関数の増減・極値

関数の増減の判定条件

$f(x):[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能 とする。

(i) 区間 (a,b) 上で $f'(x)=0$

$\iff$ 区間 (a,b) で $f(x)$ は定数関数。

(ii) 区間 (a,b) 上で $f'(x)>0$

$\Rightarrow$ 区間 (a,b) で $f(x)$ は狭義単調増加。

(iii) 区間 (a,b) 上で $f'(x)<0$

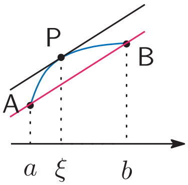
$\Rightarrow$ 区間 (a,b) で $f(x)$ は狭義単調減少。

「ある点 a で $f'(a)>0 \Rightarrow a$ の近くの区間で $f(x)$ は狭義単調増加」は誤り。

微分法

関数の増減・極値

参考：Lagrange の平均値の定理



$f(x)$: $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能

$$\Rightarrow \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad a < \xi < b$$

となる ξ がある。

A$(a, f(a))$，B$(b, f(b))$ とおくと

$$AB \text{ の傾き} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

であることに注意せよ。定理は AB と平行な接線を持つ点 P$(\xi, f(\xi))$ があることを主張している。

微分法

関数の増減・極値

極値の定義

$f(x)$ が点 a で極大になる

$\iff$ a の近所で最大になる

$\iff$ ある $\delta > 0$ があって $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a)$

極小も同様。

極大値と極小値をあわせて極値という。

微分法

関数の増減・極値

極値の必要条件

$f(x)$ が微分可能で，ある点 a で極値をとる。

$\Rightarrow \quad f'(a) = 0$

[確かめ]　a で極大になるとする。$x \fallingdotseq a, x \neq a$ で $f(x) < f(a)$ だから

$$x \to a + 0 \text{ のとき} \quad 0 > \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \to f'(a)$$

だから $f'(a) \leqq 0$

$$x \to a - 0 \text{ のとき} \quad 0 < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \to f'(a)$$

だから $f'(a) \geqq 0$

あわせて $f'(a) = 0$

微分法

関数の増減・極値

極値の十分条件

関数が微分可能で

(i) 点 a を境に単調増加から単調減少に変わるとき a で極大。

(ii) 点 a を境に単調減少から単調増加に変わるとき a で極小。

微分法

関数の増減・極値

[例題]　$f(x) = 3x^4 - 4x^3$ の増減・極値を調べる。そのため 導関数の零点・符号を調べる。

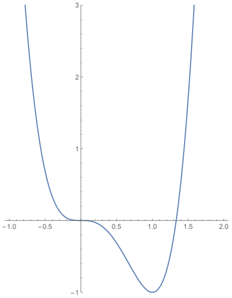
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

$f'(x) = 0$ となる x の値は $x = 0, 1$ のみ。このほかの点では極値をとらない。

$x < 0$　では $x^2 > 0, x - 1 < 0$ だから $f'(x) < 0$

$0 < x < 1$ では $x^2 > 0, x - 1 < 0$ だから $f'(x) < 0$

$1 < x$　では $x^2 > 0, x - 1 > 0$ だから $f'(x) > 0$



増減表にまとめると

x	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$x = 1$ で極小値 -1 をとる。