本日やること

- 復習：微分係数・導関数の定義
- 微分係数とグラフの接線
- べき関数の導関数
- 定数倍・和の微分法
- 積・商の微分法
- 合成関数の微分法

微分係数・導関数

復習：微分係数の定義

復習：微分係数の定義

$f(x)$ が $x=a$ で (または点 a で) 微分可能であるとは

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdots (\star) \text{ が存在すること}$$

$(\star)$ を $f(x)$ の $x=a$ におけるまたは点 a における微分係数といい,

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \cdots$$ で表す．つまり

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

微分係数・導関数

復習：導関数の定義

復習：導関数の定義

$f(x)$ が 区間 I で微分可能であるとは，区間 I の各点で微分可能であること

このとき 関数 $x \mapsto f'(x)$ を，関数 $f(x)$ の導関数といい，記号

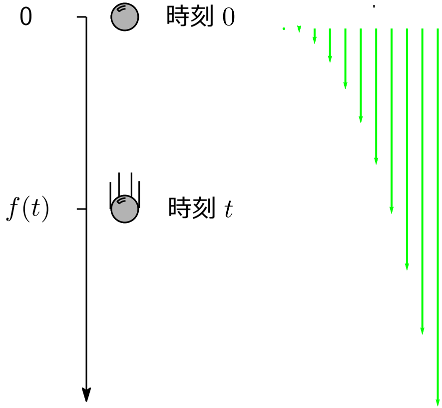
$$f', \quad f'(x), \quad (f(x))', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}$$

などで表す．つまり

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

微分係数・導関数

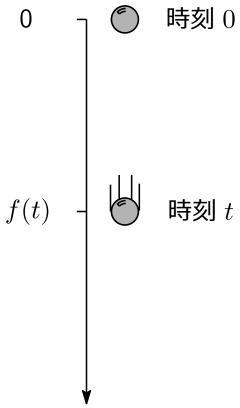
[例：自由落下]

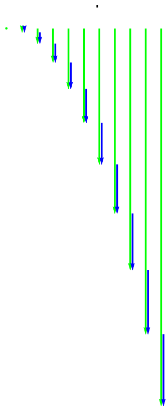


$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$
(g：重力加速度)

微分係数・導関数

[例：自由落下]





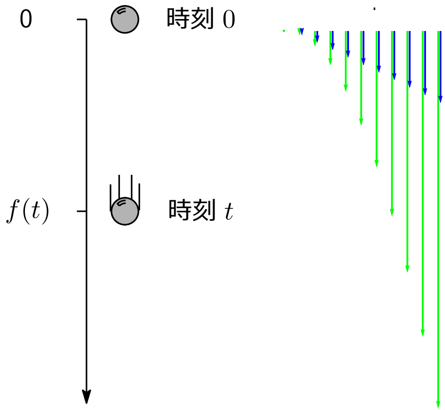
$f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (m)
(g : 重力加速度)

平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

微分係数・導関数

[例：自由落下]



$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

(g：重力加速度)

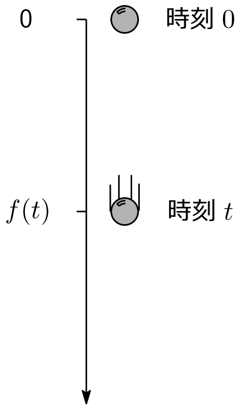
平均の速度

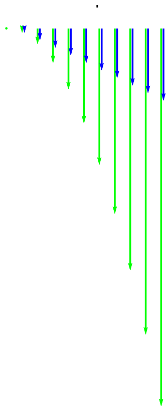
$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

微分係数・導関数

[例：自由落下]





$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$
(g：重力加速度)

平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$
$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

ここで $h \to 0$ として極限をとると

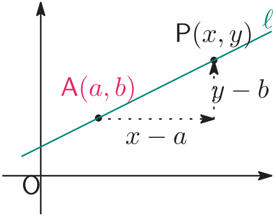
瞬間の速度 $v = gt$ (m/s)

がえられる。

微分係数・導関数

微分係数とグラフの接線

直線の方程式



点 $\mathrm{A}(a,b)$ をとおり傾きが α である直線 ℓ の方程式は

$$y-b=\alpha(x-a) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (\star)$$

ℓ 上の任意の点を P, その座標を (x,y) とする。(このとき x, y が満たす関係式が ℓ の方程式である)

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-a,y-b) \quad \text{だから} \quad \text{傾き}=\frac{y\ \text{座標の変化量}}{x\ \text{座標の変化量}}=\frac{y-b}{x-a}=\alpha$$

両辺 $x-a$ をかけて $(\star)$ を得る。

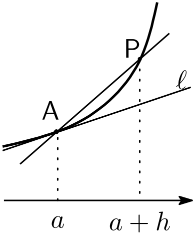
微分係数・導関数

微分係数とグラフの接線

微分係数とグラフの接線

$f(x)$ が点 a で微分可能 $\Rightarrow$ グラフは点 A$(a, f(a))$ で接線を持つ.
ただし接線とは A をとおり傾き $f'(a)$ の直線の事とする. 方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



[確かめ] P$(a+h, f(a+h))$ とおく

AP の傾き $= \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\star)$

ℓ の傾き $= f'(a) \cdots (\star\star)$

$h \to 0$ とすると $(\star) \to (\star\star)$ だから AP$\to \ell$
と考えられる。したがって ℓ は接線。

微分係数・導関数

微分係数とグラフの接線

[例 4.2]　曲線 $y = x^2$ の点 $(1, 1)$ における接線を求める。
$f(x) = x^2$ とおく。$x = 1$ における微分係数は

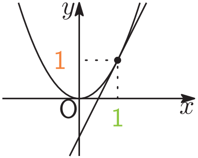
$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であるが $h \neq 0$ としてよいから h で約分ができて

$$= \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

接線は $(1, 1)$ を通って傾き $f'(1) = 2$ の直線であるから方程式は

$$y - 1 = 2(x - 1)$$



整理して

$$y = 2x - 1$$

微分係数・導関数

微分係数とグラフの接線

Geogebra で表示してみました。（根元先生作成）

https://www.geogebra.org/m/ht9dtu7j

初等関数の導関数

べき関数の導関数

定数関数・x・x^2 の導関数

(i) $\alpha = 0$ のときは $f(x) = C$ （定数関数）で $(C)' = 0$

(ii) $\alpha = 1$ のときは $f(x) = x$ で $(x)' = 1$

(iii) $\alpha = 2$ のときは $f(x) = x^2$ で $(x^2)' = 2x$

[確かめ]

(i) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

(ii) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

(iii) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{2xh + h^2}{h}$

$= \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

x^n の導関数

$f(x) = x^n \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ のとき $f'(x) = nx^{n-1}$ つまり

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

[確かめ] $f(x) = x^n$ だから $f(x+h) = (x+h)^n$. ここで
$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + B^{n-1})$ を利用して

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)-x)((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})}{h} \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

$\dfrac{1}{x}$ の導関数

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ のとき $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ つまり

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \quad (x \neq 0 \text{ のとき})$$

[確かめ] $f(x) = \dfrac{1}{x}$ だから $f(x+h) = \dfrac{1}{x+h}$ で

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

$\sqrt{x}$ の導関数

$f(x) = \sqrt{x}$ のとき $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ つまり

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x \neq 0 \text{ のとき})$$

[確かめ] $f(x) = \sqrt{x}$ だから $f(x+h) = \sqrt{x+h}$ で

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(x+h) - x}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

まとめると

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x^{-1})' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} = (-1)x^{-2} = -1x^{-1-1}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

だから

べき関数の導関数

$f(x) = x^\alpha$ (α は定数) のような関数をべき関数という。べき関数の導関数は

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha\text{は実数の定数}$$

証明は後回しにします。

初等関数の導関数

べき関数の導関数

[例]

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

初等関数の導関数

定数倍・和の微分法

定理 4.6 (定数倍・和の微分法)

$f(x)$, $g(x)$ ：微分可能, k ：定数 $\Rightarrow$ $kf(x)$, $f(x)+g(x)$ も微分可能で

(i) $(kf(x))' = kf'(x)$

(ii) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

[(ii) の確かめ]

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \text{右辺}
\end{aligned}
$$

初等関数の導関数

定数倍・和の微分法

[例]

$$\begin{aligned}(2x^3+4x-3)' &= (2x^3)'+(4x)'+(-3)' \\ &= 2(x^3)'+4(x)'+(-3)' \\ &= 2\times 3x^2+4\times 1+0 \\ &= 6x^2+4\end{aligned}$$

初等関数の導関数

積・商の微分法

定理 4.9 (積・商の微分法)

$f(x),\ g(x)$ ：微分可能

$$\Rightarrow \quad f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$ も微分可能で (分母 $\neq 0$ である点で)

(i) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (積の微分法)

(ii) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$ (商の微分法)

初等関数の導関数

積・商の微分法

[(i) の確かめ]

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&\qquad = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&\qquad = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}
\end{aligned}$$

ここで $\frac{(f(x+h)-f(x))}{h} \to f'(x)$, $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to g'(x)$, $g(x+h) \to g(x)$ だから

$$\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

初等関数の導関数

[問題]:

$f(x) = (x^2 + 3x + 2)^5$ のとき,

$$f'(x) = (2x+3)^5 \quad ?$$

$$f'(x) = 5(x^2 + 3x + 2)^4 \quad ?$$

$$f'(x) = 5(2x+3)^4 \quad ?$$

どれも誤り!

初等関数の導関数

合成関数

合成関数の定義

関数 $t = g(x)$, $y = f(t)$ に対して

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad x \in X$$

で決まる関数 $g \circ f$ を f, g の合成関数という.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & T & \xrightarrow{f} & Y \\ x & & t & & y \\ & t = g(x) & & y = f(t) & \end{array}$$

[例]

$y = f(t)$, $t = g(x)$ の合成関数は $y = f(g(x))$.

$y = t^5$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = (x^2 + 3x + 2)^5$.

$y = \sqrt{t}$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

$y = \sin t$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sin(x^2 + 3x + 2)$.

初等関数の導関数

合成関数の微分法

定理 4.7. 合成関数の微分法

$y = f(t),\ t = g(x)$ ：微分可能 $\Rightarrow$ $y = f(g(x))$ ： 微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}, \qquad \left(\text{または}\,(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)\right)$$

[確かめ]　導関数の定義より

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \qquad \left(= \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)) - f(t)}{\Delta t} \qquad \left(= \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

$$\frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \qquad \left(= \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$$

である。

初等関数の導関数

合成関数の微分法

ただし $g(x+\mathit{\Delta} x)-g(x)=\mathit{\Delta} t$, $f(t+\mathit{\Delta} t))-f(t)=\mathit{\Delta} y$ とおいた。

$$x \quad \xmapsto{g} \quad t \quad \xmapsto{f} \quad y$$

増分:$\mathit{\Delta} x$　　増分:$\mathit{\Delta} t$　　増分:$\mathit{\Delta} y$

ここで

$$\frac{\mathit{\Delta} y}{\Delta x}=\frac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} t}\times\frac{\mathit{\Delta} t}{\Delta x}$$

であるが, $\mathit{\Delta} x \to 0$ とすると $\mathit{\Delta} t \to 0$ でもあるから

$$\text{左辺} \to \frac{dy}{dx}, \quad \text{右辺} \to \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}$$

初等関数の導関数

合成関数の微分法

[例題] (1) $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^5$ の導関数を求める。

$y = f(x)$, $t = x^2 + 3x + 2$ とおく.

関数 $y = (x^2 + 3x + 2)^5$ は関数 $y = t^5$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 2) = 2x + 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^5) = 5\,t^4$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 5\,t^4 \times (2x + 3) = 5(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)^4$$

である.