本日やること

1. 関数と極限
   - 関数の定義
   - 関数のグラフ
   - 関数の極限の定義
   - 関数の極限の性質
2. 連続関数
   - 連続関数の定義
   - 連続関数の性質
3. 微分係数・導関数
   - はやさと速度
   - 微分係数・導関数の定義

関数

関数の定義

関数の最も一般的な定義

実数の集合 D で定義された (1 変数) 関数とは, D の各要素 x に実数 $y \in \mathbb{R}$ をただ１つ対応させる規則のこと。

$$f \ : \ D \to \mathbb{R} \qquad f \ : \ x \mapsto y$$

で表す．このときの y を x の f による値または像と呼び $f(x)$ で表す．だから

$$f \ : \ x \mapsto y \quad \text{は} \quad y = f(x) \quad \text{と同じ}$$

D : f の定義域　$\{f(x)\,;\, x \in D\}$: f の値域
文字 x, y は変化しうる数を表しているので 変数であるが x を独立変数, y を従属変数と呼ぶ.

関数

関数の定義

[関数 f の対応の規則の表し方]

$$f : 0 \mapsto 0, \quad \sqrt{2} \mapsto 2\sqrt{2}, \quad 2 \mapsto 8, \quad 2.5 \mapsto 15.625, \cdots$$

の様な関数の対応の規則はまとめると $\square \mapsto \square^3$ であるが, 変数 x を使うと

$$f(x) = x^3$$

のようにまとめて表現することができる.

$$f(t) = t^3, \quad f(s) = s^3, \quad y = x^3, \quad x^3, \cdots$$

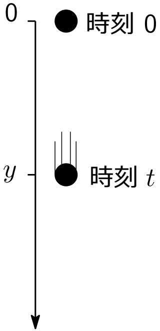
などと書くこともある。全部同じこと。

関数

何のために使うか

関数を使うと，ものごとの変化や運動を表現することができる。

例：自由落体



表で表すと

時刻 t (sec)	0	0.5	1	1.5	2	2.5
位置 y (m)	0	1.225	4.9	11.025	19.6	30.625

関数を使うと，「t に対し

$$y = 4.9t^2$$

で決まる y が対応している。」

表ではとびとびにしか分からないが，関数を使うとすべての t に対する y が分かる。

関数

例

(i) $f(x) = 3$ ：定数関数。 定義域は実数全体。

(ii) $f(x) = 2x + 3$： 1 次関数。

(iii) $f(x) = x^2 - x + 2$：2 次関数。

(iv) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$： 無理関数。 $x < 0$ では定義できない。

(v) $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$： 有理関数。 $x = 0$ では定義できない。

(vi) $f(x) = e^x$： 指数関数。

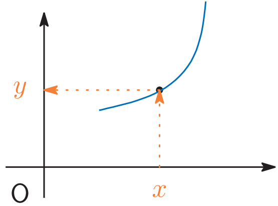
(vii) $f(x) = \sin x$：三角関数。

(viii) 以上の組み合わせ。 $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x^2+1}}$。

などなど。

関数
関数のグラフ

関数のグラフ



関数 f のグラフとは，

座標平面上の $y = f(x),\ x \in D$ を満たす点 (x, y) の集合

のこと。ただし，D は f の定義域．つまり

$$\text{点 P}(x, y) \text{ がグラフに含まれる} \iff y = f(x),\ x \in D$$

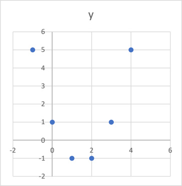
である。

関数

グラフの書き方

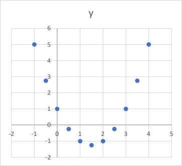
$f(x)$ の値がとびとびでも分かればグラフの概形は書ける!!

[例] $y = x^2 - 3x + 4$



x を間隔 1 で取ると

x	-1	0	1	2	3	4
y	5	1	-1	-1	1	5



x を間隔 0.5 で取ると

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	5	2.75	1	-0.25	-1	-1.25	-1	-0.25	1	2.75

関数の極限

関数の極限の定義

関数の極限の定義

「x を $x \neq a$ の状態で定数 a に限りなく近づける」ことを記号 $x \to a$ で表す。

$f(x)$: 関数, α : 定数　のとき

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は極限 (値) α に収束する」とは

$\Leftrightarrow$ 「$x \to a$ のとき $f(x)$ は限りなく α に近づく」こと

記号 : $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, 　$f(x) \to \alpha,\ (x \to a)$　で表す。

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は発散する」 とは $\Leftrightarrow$ 「どんな α にも収束しない」こと

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は正の (または負の) 無限大に発散する」とは

$\Leftrightarrow$ 「$x \to a$ のとき $f(x)$ が限りなく大きくなる」こと (または符号が負で $|f(x)|$ が限りなく大きくなること)

記号 : $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, 　$f(x) \to \pm\infty,\ (x \to a)$　で表す。

関数の極限

関数の極限の定義

関数の極限の定義

「x を $x > a$ $(x < a)$ の状態で定数 a に限りなく近づける」ことを $x \to a \pm 0$ で表す。

とくに $a = 0$ のときは $x \to \pm 0$ と書く。(複号同順)

「x を 限りなく大きくする」ことを. $x \to \infty$ で表す。

「x を 符号が負で絶対値を限りなく大きくする」ことを. $x \to -\infty$ で表す。

このとき

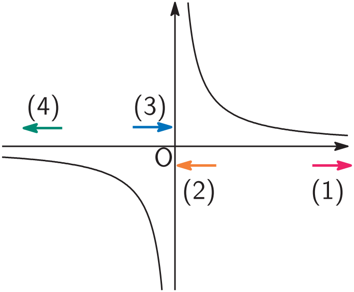
$$\lim_{x \to a \pm 0} f(x), \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$

も同様に定める。片側極限という。

関数の極限

関数の極限の例

[例 3.6]



$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=+0,$$

$$(2)\ \lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,$$

$$(3)\ \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty,$$

$$(4)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=-0$$

関数の極限

関数の極限の性質

定理 3.9　関数の極限の性質

$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$, $g(x) \to \beta$ とする．このとき,

(i) $kf(x) \to k\alpha$　(k は定数)

(ii) $(f(x) \pm g(x)) \to \alpha \pm \beta$

(iii) $(f(x)g(x)) \to \alpha\beta$

(iv) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{\alpha}{\beta}$　(ただし, $\beta \neq 0$)

(v) さらに $f(x) \leqq g(x)$,（x は a に近い全ての実数）ならば $\alpha \leqq \beta$.

(vi) $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$,（$x$ は a に近い全ての実数), $\alpha = \beta$
$\Rightarrow$ $h(x) \to \alpha = \beta$. (はさみうちの原理)

関数の極限

関数の極限の性質

[例]

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$$

関数の極限

関数の極限の性質

[注意 1.] 定理は $x \to a \pm 0$, $x \to \pm\infty$ のときも正しい。
[注意 2.]

$$\frac{\text{正の数}}{\pm\infty} = \pm 0, \quad \frac{\text{負の数}}{\pm\infty} = \mp 0, \quad \frac{\text{正の数}}{\pm 0} = \pm\infty, \quad \frac{\text{負の数}}{\pm 0} = \mp\infty$$
$$\text{正の数} \times (\pm\infty) = \pm\infty, \quad \text{負の数} \times (\pm\infty) = \mp\infty$$

などと考えると $\alpha, \beta = 0, \infty$ のときも正しい場合がある。
[注意 3.] ただし形式的に

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \cdots$$

の形になる極限 (不定型の極限) の場合には使えないので要注意。

関数の極限

関数の極限の性質

[例] $\dfrac{0}{0}$ 型不定形

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

は不可。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$x\to 1$ は x を $x\neq 1$ の状態で 1 に近づけること意味するから $(x-1)\neq 0$ で約分できるので

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

連続関数

連続関数の定義

連続関数の定義

$f(x)$：区間 I で定義された関数，　$a \in I$ のとき

(i) $f(x)$ が $x = a$ で (または点 a で) 連続　$\Leftrightarrow$　$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(a が区間の端点であるときは片側極限値を考える.)

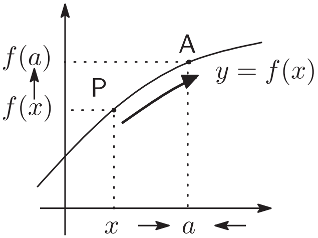
(ii) $f(x)$ が 区間 I で連続　$\Leftrightarrow$　$f(x)$ が 区間 I の各点で連続

[連続でない関数の例]　教科書 58 ページを見よ。

連続関数

連続関数の性質

[連続関数のグラフ]



A$(a, f(a))$, P$(x, f(x))$ とする。
$f(x)$ が点 a で連続ならば

$$x \to a \;\Rightarrow\; f(x) \to f(a) \Rightarrow\; \mathrm{P} \to \mathrm{A}$$

だからグラフは点 A でつながっている。

$f(x), g(x)$ が (点でまたは区間で) 連続 $\Rightarrow$

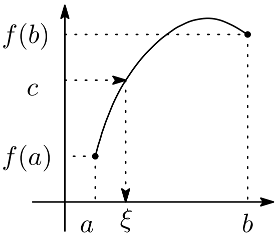
$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (分母 } \neq 0 \text{ となる点で) も連続}$$

だから多項式関数, 有理関数 は定義域で連続。
指数関数, 三角関数も作り方から連続であることがわかる。

連続関数

連続関数の性質

中間値の定理



関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であり，さらに $f(a) < f(b)$ であるならば，$f(a) < c < f(b)$ であるようなどんな実数 c に対しても

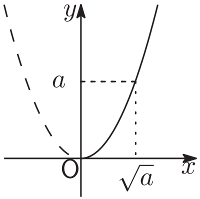
$$f(\xi) = c$$

を満たすような実数 ξ が区間 $[a, b]$ に少なくとも 1 つ存在する．$f(a) > f(b)$ であるときも同様である．

連続関数

連続関数の性質

[例]　平方根の存在

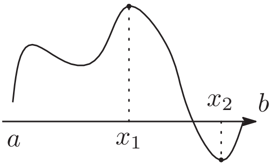


連続関数

連続関数の性質

最大値最小値の定理

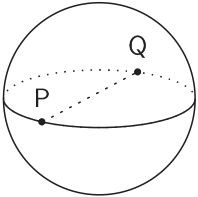
関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で連続であるならば $f(x)$ が最大値をとる点および最小値をとる点がこの区間に存在する.



連続関数

連続関数の性質

[例題]



地球表面の気温分布は連続であるとする。赤道上の点 P とその裏側の点 Q で、気温が一致するものがあることを説明せよ。

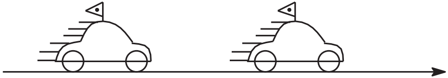
微分係数・導関数

はやさと速度

はやさと速度

$$\text{はやさ} = \frac{\text{みちのり}}{\text{かかったじかん}}$$ を精密化する

時刻 t 　 $t+h$



座標 $f(t)$ 　 $f(t+h)$

(時刻 t から $t+h$ までの) 平均の速度 $= \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$

負の値も取りうることに注意

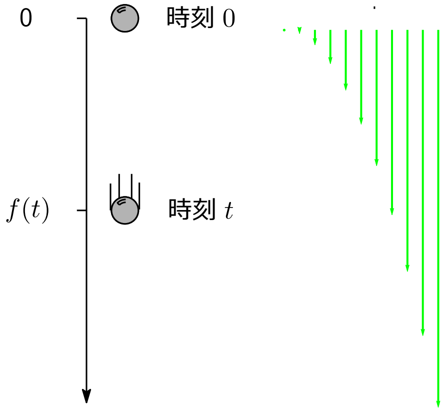
(時刻 t の) 瞬間の速度を $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ で定める。

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であることに注意

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



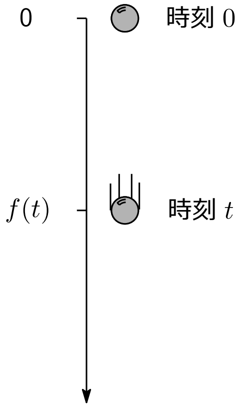
$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

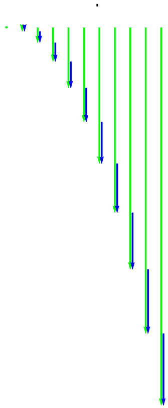
(g : 重力加速度)

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]





$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

(g : 重力加速度)

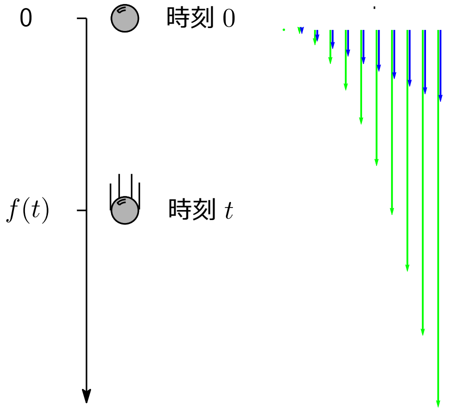
平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

$(g$: 重力加速度)

平均の速度

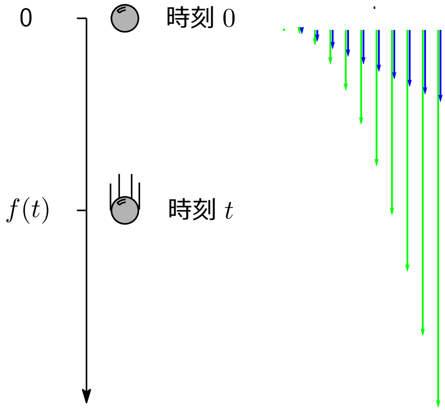
$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



$f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (m)
(g : 重力加速度)

平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

ここで $h \to 0$ として極限をとると

瞬間の速度 $v = gt$ (m/s)

がえられる。

微分係数・導関数

運動の法則

Newton の運動の法則 その 3 運動方程式

物体に力 $F(t)$ が働くときその物体には

$$F(t) = ma(t)$$

で決まる加速度 $a(t)$ が生じる.

今の場合 $a(t) = g$ (一定) だから一定の力 $F = mg$ で引っ張られていることになる。これが重力。

平均の速度は t に比例するとは言えないからこの法則は見えてこない。瞬間の速度を考えることが必要である。

微分係数・導関数

微分係数の定義

微分係数の定義

$f(x)$ が $x = a$ で (または点 a で) 微分可能であるとは

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\star) \text{ が存在すること}$$

$(\star)$ を $f(x)$ の $x = a$ におけるまたは点 a における微分係数といい,

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \cdots \text{で表す．つまり}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

微分係数・導関数

導関数の定義

導関数の定義

$f(x)$ が 区間 I で微分可能であるとは，区間 I の各点で微分可能であること

このとき 関数 $x \mapsto f'(x)$ を，関数 $f(x)$ の導関数といい，記号

$$f', \quad f'(x), \quad (f(x))', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}$$

などで表す．つまり

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$