建築デザイン数理 第5回　解答

1. (1) $\underline{F(x)\text{ が } f(x)\text{ の原始関数であるというのは}}$

$$\underline{\frac{d}{dx}F(x) = f(x)}$$

<u>となる事である.</u> ただし $\dfrac{d}{dx}F(x)$ は $F'(x)$ と同じで $F(x)$ の導関数を表す記号である.

(式のみ書くのは不可。)

(2) $\underline{f(x)\text{ の不定積分とは}}$

$$\underline{F(x) + C}$$

<u>のことである.</u> ただし, $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であり, C は任意の定数である. この定数 C を**積分定数**という.

(式のみ書くのは不可。)

$f(x)$ の不定積分を記号

$$\int f(x)dx$$

で表す. したがって

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

である. しばらく積分定数は省略してもよいことにする.

2. 次の積分, 導関数を計算せよ。また空欄に適する数, 式を書き入れよ。

(1) C を定数とするとき

$$\frac{d}{dx}(C) = 0$$

だから

$$\int 0\,dx = C$$

(2) $\dfrac{d}{dx}2x = 2$

だから

$$\int 2\,dx = 2x + C$$

(3) $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$

だから両辺を 2 で割って

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x$$

だから

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

(4) a を 0 でない定数とするとき,

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$$

だから 両辺を a で割って

$$\frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left(x^a\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}x^a\right) = x^{a-1}$$

ここで $a-1=\alpha$ とおくと $a=\alpha+1$ となるから.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right) = x^{\alpha}$$

だから $\alpha \neq 1$ のとき

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

(5) $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

だから

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

である.

(6) $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

だから

$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$$

だから

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

である．

(7) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ である．$\alpha = \dfrac{1}{2}$ として (4) を用いると

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

(8) $x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ である．$\alpha = -\dfrac{1}{2}$ として (4) を用いると

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx &= \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

(9) $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ であるが (4) は使えない．

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x}$$

だから不定積分の定義により

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C.$$

(10) $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

だから不定積分の定義により

$$\int e^x\, dx = e^x + C.$$

以下では積分定数 C は省略する．

(11) $\displaystyle\int (x^2 + 3x)\, dx = \int x^2\, dx + 3\int x\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}.$

(12) $\displaystyle\int (8x^3 - 2\cos x)\, dx = 8\int x^3\, dx - 2\int \cos x\, dx = 2x^4 - 2\sin x.$

(13) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})\, dx = \frac{1}{1+\frac{3}{2}}x^{1+\frac{3}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}x^{1-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2\,x^{\frac{1}{2}}.$$

(14) $\displaystyle\int (9x^2 + 2e^x)dx = 9\int x^2\,dx + 2\int e^x\,dx = 3x^3 + 2e^x.$

(15) $\displaystyle\int (2\sin x - 3\cos x)\;dx = \int 2\sin x\,dx - 3\int \cos x\,dx = -2\cos x - 3\sin x$

(16) $\displaystyle\int (2x-3)^5\,dx$

$$2x - 3 = t \qquad (*)$$

とおき, この両辺を x で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる. この $(**)$ から dx を $\dfrac{1}{2}\,dt$ に置き換えればよいことが分かる. このおきかえにより

$$\int (2x-3)^5\,dx = \int t^5\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\int t^5\,dt = \frac{1}{12}\,t^6$$

$t = 2x - 3$ だから

$$= \frac{1}{12}(2x-3)^6.$$

(17) $2x - 3 = t$ と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{12}(2x-3)^6\right) = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}t^6\right) = 2\frac{1}{12}6t^5 = t^5 = (2x-3)^5$$

これは (16) の検算である。

(18) $\displaystyle\int \cos(2x-3)\,dx$

(16) と同じ変換で

$$2x - 3 = t \qquad (*)$$

とおき,x で微分すると

$$2=\frac{dt}{dx}$$

となるが, 両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx=\frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる. これらにより $2x-3$, dx をおきかえると,

$$\int \cos(2x-3)\,dx=\int \cos t\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{1}{2}\sin t$$

$t=2x-3$ だから

$$=\frac{1}{2}\sin(2x-3)$$

(19) $2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin(2x-3)\right)=\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin t\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cos t=\cos t=\cos(2x-3)$$

これは (18) の検算である。

(20) $\displaystyle\int e^{2x-3}\,dx$

(16) と同じ変換で $2x-3$, dx をおきかえると,

$$\int e^{2x-3}\,dx=\int e^{t}\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{1}{2}e^{t}$$

$t=2x-3$ だから

$$=\frac{1}{2}e^{2x-3}$$

(21) $\displaystyle\int\sqrt{2x-3}\,dx$ を計算しよう. (16) と同じ変換で $2x-3=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2$ だから $dx=\dfrac{1}{2}dt$. したがって 置換積分法を使って

$$\int\sqrt{2x-3}\,dx=\int\sqrt{t}\frac{1}{2}\,dt$$

(7) により

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}$$

(22) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx$ を計算しよう．(16) と同じ変換で $2x-3=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2$ だから $dx=\dfrac{1}{2}dt$. したがって 置換積分法を使って

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{2}\,dt$$

(8) により

$$= \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3}$$

(23) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-3}\,dx$ を計算しよう．(16) と同じ変換で $2x-3=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2$ だから $dx=\dfrac{1}{2}dt$. したがって 置換積分法を使って

$$\int \frac{1}{2x-3}\,dx = \int \frac{1}{t}\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt$$

(9) を使って

$$= \frac{1}{2}\cdot \log|t| = \frac{1}{2}\log|2x-3|$$

(24) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ を計算する。

$t=x^2+1$ とおき, この両辺を x で微分すると

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{2x}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

という等式が得られる．このことから dx を $\dfrac{1}{2x}\,dt$ に置き換えればよいことになる．

この置き換えにより

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2x}dt\right) = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\,2t^{\frac{1}{2}} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1}.$$

(25) $\displaystyle\int x(1-x)^4\,dx$

$1-x=t$ とおく。この両辺を x で微分すると

$$-1=\frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{-1}$ を掛けると

$$dx=-dt$$

という等式が得られる．このことから dx を $-dt$ に置き換えればよいことになる．また $1-x=t$ より $x=1-t$ であるから

$$\begin{aligned}\int x(1-x)^4\,dx &= \int (1-t)t^4\,(-dt)\\ &= \int (t-1)t^4\,dt = \int t^5\,dt - \int t^4\,dt\\ &= \frac{1}{6}\,t^6 - \frac{1}{5}\,t^5 = \frac{1}{6}\,(1-x)^6 - \frac{1}{5}\,(1-x)^5\end{aligned}$$

(26) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$\cos x = t$ とおく。両辺微分して $-\sin x = \dfrac{dt}{dx}$

$\sin x\,dx = -dt$

これらで置き換えをして

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-dt}{t} = -\log|t| = -\log|\cos x|$$

(27) [準備]：$\displaystyle\int e^{-x}\,dx$ を計算する。

$$-x=t$$

とおく。両辺を x で微分して

$$-1=\frac{dt}{dx}$$

両辺に -1 をかけて

$$dx=-dt$$

したがって

$$\int e^{-x}dx = \int e^t(-dt) = -\int e^t dt = -e^t = -e^{-x}$$

これを用いて $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$ を計算しよう。

$f'(x) = e^{-x}$, $g(x) = x$ とみて部分積分法

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx$$

を使う.

まず $f'(x) = e^{-x}$ であることから [準備] より

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$$

となる. 次に部分積分法を使って

$$\begin{aligned} \int xe^{-x}\, dx &= \left(-e^{-x}\right) x - \int \left(-e^{-x}\right) (x)'\, dx \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x}. \end{aligned}$$

短く言うと

$$\begin{aligned} \int xe^{-x}\, dx = \int x \left(-e^{-x}\right)'\, dx &= x\left(-e^{-x}\right) - \int (x)' \left(-e^{-x}\right)\, dx \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x}. \end{aligned}$$

としてもよい.