建築デザイン数理 第4回　解答

(★) は「発展問題」のつもりです。これ以外の問題は全部やらせてください。

問題 1. (1) $y = e^x$

$(\log y)' = \dfrac{1}{y}$ から導く。$y = e^x$ は $x = \log y$ の逆関数であるから逆関数の微分法により

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\log y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = e^x,$$

この説明は必ずしもなくてもよいです。

(2) $y = \log x$ の導関数は $t \to 0$ のとき $(1+t)^{\frac{1}{t}} \to e$ であることを使う

$$\begin{aligned}\frac{\log(x+h) - \log x}{h} &= \frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x} = \frac{1}{x}\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)\\ &= \frac{1}{x}\log\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\}\end{aligned}$$

ここで $t = \frac{h}{x}$ とおくと $t \to 0$ だから

$$= \frac{1}{x}\log\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} \to \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x}$$

だから $y' = \dfrac{1}{x}$

この説明も必ずしもなくてもよいです。

(3) $y = e^{ax}$ のとき $t = ax$ とおく.

関数 $y = e^{ax}$ は関数 $y = e^t$, $t = ax$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = a,$　　また (1) より $\dfrac{dy}{dt} = e^t$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = e^t \times a = a\,e^{ax}$

となる.

(4) $y = \log(ax)$ のとき $t = ax$ とおく.

関数 $y = \log(ax)$ は関数 $y = \log t$, $t = ax$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(ax) = a,$　　また (2) より $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}\log t = \dfrac{1}{t}$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\times a=\frac{1}{x}$$

となる.

$(\log(ax))'=(\log x)'$

であって不思議な気がするかもしれないが,

$\log(ax)=\log a+\log x$

であるから導関数が一致するのは当然である.

(5) 積の微分法と (3) により

$(xe^{3x})'=(x)'e^{3x}+x(e^{3x})'=e^{3x}+x(3e^{3x})=(1+3x)\,e^{3x}.$

(6) $y=\log|x+\sqrt{x^2+1}|$, $t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおく.

関数 $y=\log|x+\sqrt{x^2+1}|$ は関数 $y=\log|t|$, $t=x+\sqrt{x^2+1}$

の合成関数である.

まず $(\sqrt{x^2+1})'$ を計算しよう。$z=\sqrt{x^2+1}$ とおくと $t=x+z$ であるが,
ここで $s=x^2+1$ とおくと $z=\sqrt{x^2+1}$ は $z=\sqrt{s}$, $s=x^2+1$ の合成関数
であり, 合成関数の微分法により

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{ds}\frac{ds}{dx}=\frac{d}{ds}\sqrt{s}\frac{d}{dx}(x^2+1)=\frac{1}{2\sqrt{s}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

である。(これが大事な導関数である。前回にもやりました。)

再び y, t にもどると

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(x+z)=1+\frac{dz}{dx}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\times\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})\times\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(x+\sqrt{x^2+1})\times\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

となる.

(7) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ のとき

$$y'=\frac{1}{2}((e^x)'-(e^{-x})')=\frac{1}{2}(e^x-(-e^{-x}))=\cosh x$$

(8) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ のとき

$$y'=\frac{1}{2}((e^x)'+(e^{-x})')=\frac{1}{2}(e^x+(-e^{-x}))=\sinh x$$

(9) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\Big($ これを $\tanh x$ と書く。$\Big)$ のとき商の微分法により

$$\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'=\frac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{1}{(\cosh x)^2}.$$

これは $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ に似ている。

(10) $y=\sin(3x-2)$ のとき $3x-2=t$ とおくと $y=\sin(3x-2)$ は $y=\sin t$ と $t=3x-2$ の合成関数となる.

$t=3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx}=3,$

$y=\sin t$ より $\dfrac{dy}{dt}=\cos t$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=3\cos t=3\cos(3x-2).$$

(11) $y=\cos(3x-2)$ のとき, $3x-2=t$ とおくと $y=\cos(3x-2)$ は $y=\cos t$ と $t=3x-2$ の合成関数となる.

$t=3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx}=3,$

$y=\cos t$ より $\dfrac{dy}{dt}=-\sin t$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 3(-\sin t) = -3\sin(3x-2).$$

(12) $y = \tan(3x-2)$ のとき, $3x-2 = t$ とおくと

$y = \tan t$ だから

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

である. あとは (1) と同様に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 3\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{3}{\cos^2(3x-2)}.$$

(13) $y = \cos^3(3x-2)$ のとき,

$3x-2 = t$, $\cos(3x-2) = s$ とおくと $y = s^3$, $s = \cos t$ だから $y = \cos^3(3x-2)$ は

$$y = s^3,\ s = \cos t,\quad t = 3x-2,$$

の合成関数である.

$$\frac{dy}{ds} = 3s^2,\quad \frac{ds}{dt} = -\sin t,\quad \frac{dt}{dx} = 3$$

だから合成関数の微分法（3 つ以上の関数の合成の場合にも使える）により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{dt}{dx} = 3s^2 \times (-\sin t) \times 3 = -9\sin(3x-2)\cos^2(3x-2).$$

図式的に書くと

$$\begin{array}{cccccccc} & x & \longmapsto & t & \longmapsto & s & \longmapsto & y \\ & & \vdots & \parallel & \vdots & \parallel & \vdots & \parallel \\ & & \downarrow & 3x-2 & \downarrow & \cos t & \downarrow & s^3 \\ \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{dt}{dx} & \times & \dfrac{ds}{dt} & \times & \dfrac{dy}{ds} & \end{array}$$

(14) $y = \cos\left((3x-2)^3\right)$ のとき,

$3x-2 = t$, $(3x-2)^3 = s$ とおくと $y = \cos s$, $s = t^3$ だから $y = \cos\left((3x-2)^3\right)$ は

$$y = \cos s,\ s = t^3,\quad t = 3x-2,$$

の合成関数である.

$$\frac{dy}{ds} = -\sin s, \quad \frac{ds}{dt} = 3t^2, \quad \frac{dt}{dx} = 3$$

だから合成関数の微分法（3 つ以上の関数の合成の場合にも使える）により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{dt}{dx} = -\sin s \times 3t^2 \times 3 = -9\sin\left((3x-2)^3\right)\,(3x-2)^2.$$

図式的に書くと

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longmapsto & t & \longmapsto & s & \longmapsto & y \\ & & \| & & \| & & \| \\ & & 3x-2 & & t^3 & & \cos s \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{dt}{dx} & \times & \dfrac{ds}{dt} & \times & \dfrac{dy}{ds} \end{array}$$

(15) 商の微分法により

$$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{\cos x + 1}.$$

(16) $y = e^{\sin x}$, $t = \sin x$ とおく.

関数 $y = e^{\sin x}$ は関数 $t = \sin x$, $y = e^t$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = \cos x \times e^t = e^{\sin x}\cos x$$

となる.

(17) $y = \log(\cos x)$, $t = \cos x$ とおく.

関数 $y = \log(\cos x)$ は関数 $t = \cos x$, $y = \log t$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}=-\sin x\times\frac{1}{t}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$$
となる.

(18) 積の微分法により

$(e^{2x}\cos 3x)'=(e^{2x})'\cos 3x+e^{2x}(\cos 3x)'=2\,e^{2x}\ \cos 3x-3\,e^{2x}\ \sin 3x.$

(19) $y=x\cos x$ のとき積の微分法により

$y'=(x)'\cos x+x(\cos x)'=\cos x+x(-\sin x)=\cos x-x\sin x$

(20) $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$ のとき, 商の微分法により

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1+\cos x)'(1-\sin x)-(1+\cos x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(1-\sin x)-(1+\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2} \end{aligned}$$

問題 2. (★) 関数 $y=\dfrac{2}{e^{-2x}+1}\cdots(a)$ は関係式 $y'=(2-y)y\cdots(b)$ を満たすことを示せ。((b) のような関係式を微分方程式といい, (a) をその解という。)

(a) を (b) に代入すると

(b) の左辺 $=\left(\dfrac{2}{e^{-2x}+1}\right)'=\dfrac{-2}{(e^{-2x}+1)^2}(e^{-2x}+1)'=\dfrac{-2}{(e^{-2x}+1)^2}(-2e^{-2x})=\dfrac{4e^{-2x}}{(e^{-2x}+1)^2}$

(b) の右辺 $=\left(2-\dfrac{2}{e^{-2x}+1}\right)\dfrac{2}{e^{-2x}+1}=\dfrac{2e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\dfrac{2}{e^{-2x}+1}=\dfrac{4e^{-2x}}{(e^{-2x}+1)^2}$

だから (b) が成り立つ。