建築デザイン数理 第3回　解答

1 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ の増減を調べ, 極値を求めよ. また, グラフの概形を描け.

[増減を調べる]

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2$ のとき。また

$x < 0$ のとき $x < 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) > 0$, だからここで狭義単調増加

$0 < x < 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) < 0$, だからここで狭義単調減少

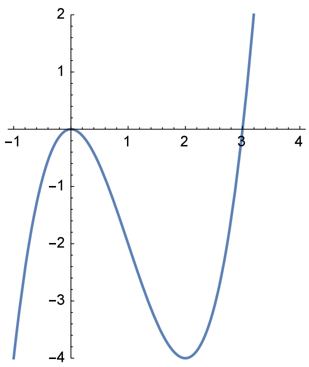
$x > 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 > 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) > 0$, だからここで狭義単調増加

[増減表を書く] 以上から増減を調べると

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

となる.

だから $x = 0$ で極大値 0 をとり $x = 2$ で極小値 -4 をとる.



2. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ とする。

(1)　$f(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ。

分母は常に正だから

$x > 0$ のとき $f(x) > 0$,　$x < 0$ のとき $f(x) < 0$.

(2) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。また $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ。

商の微分法により

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(4x)'(x^2+4) - 4x(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{4(x^2+4) - 4x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4(x^2-4)}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{-4(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}
\end{aligned}
$$

であり, 分母は常に正だから

$x < -2$ または $x > 2$ のとき $f'(x) < 0$, $\quad -2 < x < 2$ のとき $f'(x) > 0$.

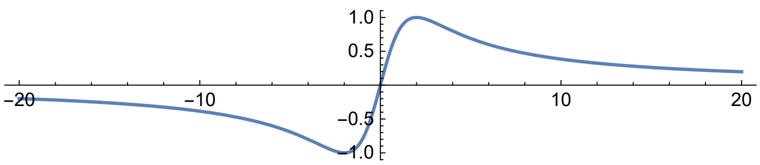
極限を調べると

$$
\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{x^2+3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x + \frac{3}{x}} = \frac{4}{\pm\infty + \frac{3}{\pm\infty}} = \pm 0,
$$

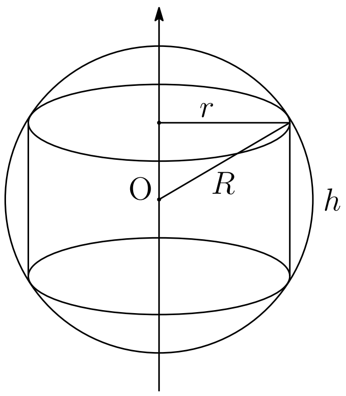
(3) $f(x)$ の増減表を作り, グラフの概形を書け。

以上から増減凹凸を調べると

x	$-\infty$		-2		2		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$+0$



3. 半径 R の球に底面の半径が r, 高さが h である直円柱が内接している。



(1) この円柱の体積 V を R, h で表せ。

直円柱の高さを h, 底面の半径を r とすると 三平方の定理より

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$$

であるから直円柱の体積 V は

$$V(h) = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) h \quad (0 \leqq h \leqq 2R)$$

となり h の関数である.

(2) 体積 V の最大値を求めよ.

極値を取る点をさがそう. 点 h で極値を取るための必要条件は $V'(h) = 0$ となることであるが,

$V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right)$ だから必要条件を満たす点は $0 \leqq h \leqq 2R$ の範囲では $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ のみである. この他の点では極値を取らない.

また $V'(h)$ は点 $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ の前後で符号が正から負に変わるので $V(h)$ はこの点で極大になる. 他に極大になる点は無く $V(0) = V(2R) = 0$ だからこの点で最大値 $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ をとることが分かる. これは球の体積の $\frac{1}{\sqrt{3}}$ にあたる.

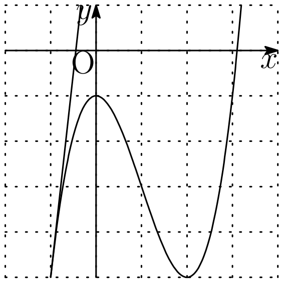
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ の $(-1, f(-1))$ における接線を求め, 曲線 $y = f(x)$ と接線を図示せよ。

$f(-1) = -5$ だから接点は $(-1, -5)$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ だから $f'(-1) = 9$。したがって接線は $(-1, -5)$ を通り傾き 9 の直線だから $y = 9(x+1) - 5$

増減表は

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$



5. $f(x) = -4x^3 + 3x$ の増減と極値を調べてグラフの概形を描け.

$f'(x) = -12x^2 + 3 = -3(4x^2 - 1) = -12\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ だから 増減表は

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$

$x = -\dfrac{1}{2}$ で極小値 -1 をとり, $x = \dfrac{1}{2}$ で極大値 -1 をとる。