建築デザイン数理 第2回　解答

問題 1. $f(x)=x^2$ とする.

(1) この関数の 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$f'(x)=2x.$　(授業で述べた結果を使ってよい。)

(2) この関数の 1 における微分係数 $f'(1)$ を求めよ.

(1) で求めた導関数に $x=1$ を代入して $f'(1)=2\times 1=2$

(3) この関数のグラフの, x 座標が 1 である点における接線の方程式を求めよ.

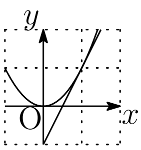
接線の傾きは $f'(1)=2$。グラフ上の x 座標が 1 である点は, y 座標が $f(1)=1$ だから $(1,f(1))=(1,1)$。接線は $(1,1)$ をとおり傾き 2 の直線だからその方程式は

$y-1=2(x-1)$

変形して

$y=2(x-1)+1=2x-1$

(4) この関数のグラフと, (3) で求めた接線を書け.



問題 2. $f(x)=x^2-2x$ とする.

(1) この関数の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$f'(x)=(x^2-2x)'=(x^2)'-2(x)'=2x-2.$

(2) この関数の 2 における微分係数 $f'(2)$ を求めよ.

(1) で求めた導関数に $x=1$ を代入して $f'(1)=2\times 2-2=2$

(3) この関数のグラフの, x 座標が 2 である点における接線の方程式を求めよ.

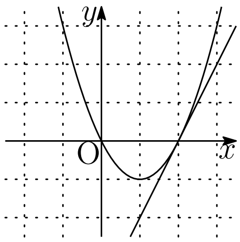
接線の傾きは $f'(2)=2$。グラフ上の x 座標が2である点は, y 座標が $f(2)=0$ だから $(2,f(2))=(2,0)$。接線は $(2,0)$ をとおり傾き 2 の直線だからその方程式は

$y-0=2(x-2)$

変形して

$y=2(x-2)=2x-4$

(3) この関数のグラフと, (2) で求めた接線を書け.



問題 3. $f(x)=x^3$ とする.

(1) この関数の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$f'(x)=(x^3)'=3x^2.$ （授業で述べた結果を使ってよい。）

(2) この関数の $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ を求めよ.

(1) で求めた導関数に $x=1$ を代入して $f'(1)=3\times1^2=3$

(3) この関数のグラフの, x 座標が1である点における接線の方程式を求めよ.

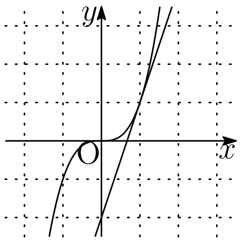
接線の傾きは $f'(1)=3$。グラフ上の x 座標が1である点は, y 座標が $f(1)=1$ だから $(1,f(1))=(1,1)$。接線は $(1,1)$ をとおり傾き 3 の直線だからその方程式は

$y-1=3(x-1)$

変形して

$y=3(x-1)+1=3x-2$

(4) この関数のグラフと, (3) で求めた接線を書け.



問題 4. 次の関数の導関数を計算せよ。

(1) $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

$y' = (x^3 - 2x^2 + 5x + 6)' = (x^3)' - 2(x^2)' + 5(x)' + (6)' = 3x^2 - 4x + 5$

(2) $y = 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$$y' = \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = 3(\sqrt{x})' - 2\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

(3) $y = \dfrac{x}{x-1}$

商の微分法により

$$y' = \frac{(x)'(x-1) - x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

(4) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

商の微分法により

$$y' = \frac{(\sqrt{x})'(x-1) - \sqrt{x}(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

(5) $y = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

商の微分法により

$$y' = \frac{(\sqrt{x}-1)'(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

(6) $y = (2x-1)^{10}$ のとき $t = 2x - 1$ とおく.

関数 $y=(2x-1)^{10}$ は関数 $y=t^{10}$, $t=2x-1$ の合成関数である.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(t^{10})=10\,t^9 \qquad \frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\,(2x-1)=2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=10\,t^9\times 2=20(2x-1)^9$$

である.

(7) $y=\dfrac{1}{2x-1}$ のとき, $t=2x-1$ とおく. $y=\dfrac{1}{2x-1}$ は $y=\dfrac{1}{t}$, $t=2x-1$ の合成関数となる.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2} \qquad \frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\,(2x-1)=2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\times 2=-\frac{2}{(2x-1)^2}$$

である.

または 商の微分法により

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2x-1}\right)'&=\frac{(1)'\times(2x-1)-1\times(2x-1)'}{(2x-1)^2}\\&=\frac{0\times(2x-1)-1\times 2}{(2x-1)^2}=\frac{-2}{(2x-1)^2}.\end{aligned}$$

(8) $y=\sqrt{2x-1}$ のとき, $t=2x-1$ とおく. 関数 $y=\sqrt{2x-1}$ は関数 $y=\sqrt{t}$, $t=2x-1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\,(2x-1)=2$$

でありまた

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times 2=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

となる.

(9) $y=x^2+1$ のとき,

$$y' = (x^2+1)' = (x^2)' + (1)' = 2x.$$

(10) $y = (x^2+1)^8$ のとき $t = x^2+1$ とおく.

関数 $y = (x^2+1)^8$ は関数 $y = t^8$, $t = x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^8) = 8\,t^7$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 8\,t^7 \times (2x) = 16x(x^2+1)^7$$

である.

(11) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ のとき, $t = x^3+2x^2+1$ とおく.

関数 $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ は関数 $y = \dfrac{1}{t}$, $t = x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^{-1}\right) = -t^{-2}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = (-t^{-2}) \times (2x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

である.

または 商の微分法により

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{(1)' \times (x^2+1) - 1 \times (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{0 \times (x^2+1) - 1 \times (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

(12) $y = \sqrt{x^2+1}$ のとき, $t = x^2+1$ とおく. 関数 $y = \sqrt{x^2+1}$ は関数 $y = \sqrt{t}$, $t = x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x$$

でありまた

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

となる.