建築デザイン数理 No. 1 解答

1　a は定数とする。関数 $f(x)$ の, a における微分係数 $f'(a)$ を定義する式を書け.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2　a は定数とする。定義にしたがって次の関数の a における微分係数 $f'(a)$ を求めよ.

(1) $f(x) = 2$ のとき

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f(a+h) = 2,\ f(a) = 2$ だから

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2-2}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

(2) $f(x) = x$ のとき

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f(a+h) = a+h,\ f(a) = a$ だから

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h) - a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$

$h \to 0$ は h が $h \neq 0$ の状態で 0 に近づくことだから h で約分できて

$$= \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

(3) $f(x) = x^2$ のとき とおくと $f(x+h) = (x+h)^2$ だから

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f(\square) = \square^2$ より $f(a+h) = (a+h)^2,\ f(a) = a^2$ だから

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h}$$

$h \to 0$ は h が $h \neq 0$ の状態で 0 に近づくことだから h で約分できて

$$= \lim_{h \to 0} (2a + h) = a.$$

(4) $f(x) = x^n, \ (n = 1, 2, \cdots)$ のとき

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f(\square) = \square^n$ より $f(a+h) = (a+h)^n, \ f(a) = a^n$ だから

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h}$$

$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + B^{n-1})$ を利用して

$$= \lim_{h \to 0} \frac{((a+h) - a)((a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h((a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})}{h}$$

$h \to 0$ は h が $h \neq 0$ の状態で 0 に近づくことだから h で約分できて

$$= \lim_{h \to 0} ((a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$$

$h \to 0$ のとき $(a+h)^k \to a^k$ だから

$$= na^{n-1}$$

(5) $f(x) = \sqrt{x}$ のとき

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h\,(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ を利用して

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h) - a}{h\,(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\,(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$h \neq 0$ より, h で約分することができるので

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

$\sqrt{x}$ は連続関数だから $h \to 0$ とすると $\sqrt{a+h} \to \sqrt{a}$ だから

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

(6) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ のとき,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ここで $f(a+h) = \dfrac{1}{a+h}$, $f(a) = \dfrac{1}{a}$ だから

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$