

# 本日より

## ① 積分法

- 広義積分法

## ② 積分法の応用

- 平面図形の面積

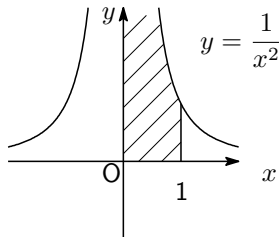
# 定積分法

## 広義積分

$f(x)$  は有界閉区間  $[a, b]$  で連続  $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$  が存在

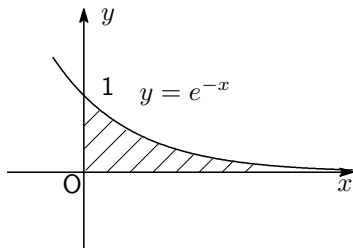
1. 端の点で不連続な (または連続になるように定義できない) 場合]

例



2. [積分区間が有界でない場合]

例



の積分も重要である.

このような場合の関数  $f(x)$  の定積分を定めよう.

# 定積分法

## 広義積分

[1] 区間  $[a, \infty)$  上の広義積分の定義

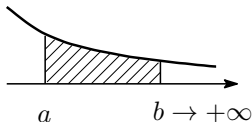
$f(x) : [a, \infty)$  で連続である場合, 極限

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

が存在するとき**広義積分**  $\int_a^\infty f(x) dx$  は収束する  
といい, その値を

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

によって定める.



# 定積分法

## 広義積分

原始関数による計算

$f(x)$  の原始関数を  $F(x)$  とするとき

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [F(x)]_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(a)$$

となる。これを

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{\infty} = F(\infty) - F(a)$$

と書く。

# 定積分法

## 広義積分

[2] 区間  $(-\infty, b]$  上の広義積分の定義

$f(x) : (-\infty, b]$  で連続である場合, 極限

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

が存在するとき**広義積分**  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  は**収束する**といい, その値を

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

によって定める.

# 定積分法

## 広義積分

原始関数による計算

$f(x)$  の原始関数を  $F(x)$  とするとき

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [F(x)]_a^b = F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$$

となる。これを

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty)$$

と書く。

# 定積分法

## 広義積分

[3] 区間  $[a, b)$  上の広義積分の定義

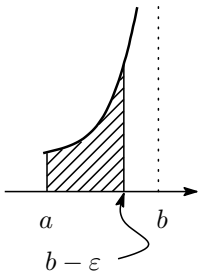
$f(x) : [a, b)$  で連続であるが  $x = b$  で必ずしも連続でない場合、極限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が存在するとき**広義積分**  $\int_a^b f(x) dx$  は収束する**といい**, その値を

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

によって定める.



# 定積分法

## 広義積分

原始関数による計算

$f(x)$  の原始関数を  $F(x)$  とするとき

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [F(x)]_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(b-\varepsilon) - F(a)$$

となる。これを

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^{b-0} = F(b-0) - F(a)$$

と書く。



# 定積分法

## 広義積分

[4] 区間  $(a, b]$  上の広義積分の定義

$f(x) : (a, b]$  で連続であるが  $x = a$  で必ずしも連続でない場合, 極限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

が存在するとき**広義積分**  $\int_a^b f(x) dx$  は**収束する**といい, その値を

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

によって定める.

# 定積分法

## 広義積分

原始関数による計算

$f(x)$  の原始関数を  $F(x)$  とするとき

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [F(x)]_{a+\varepsilon}^b = F(b) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(a + \varepsilon)$$

となる。これを

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_{a+0}^b = F(b) - F(a+0)$$

と書く。

## 定積分法

## 広義積分

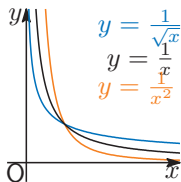
[例題 6.3.5]

$$(1) \int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} \text{ であるから } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[ \frac{-1}{x} \right]_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty} - (-1) = 1.$$

$$(2) \int \frac{dx}{x} = \log|x| \text{ であるから } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \left[ \log x \right]_1^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \log b - 0 = \infty.$$

$$(3) \int \frac{dx}{x} = \log|x| \text{ であるから } \int_0^1 \frac{dx}{x} = \left[ \log x \right]_{+0}^1 = 0 - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \log \varepsilon = \infty.$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \text{ であるから } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[ 2\sqrt{x} \right]_{+0}^1 = 2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} 2\sqrt{\varepsilon} = 2.$$



# 定積分法

## 広義積分

広義積分でも部分積分法・置換積分法が使える

[例 1]  $\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$  だから

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \left[ -\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{2}$$

であるが、 $-2x = t$  とおくと  $dx = \frac{-dt}{2}$ ,  $x = 0 \Rightarrow t = 0$ ,  $x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow -\infty$  だから

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \int_0^{-\infty} e^t \frac{(-dt)}{2} = -\frac{1}{2} [e^t]_0^{-\infty} = \frac{1}{2}$$

としてもよい。

# 定積分法

## 広義積分

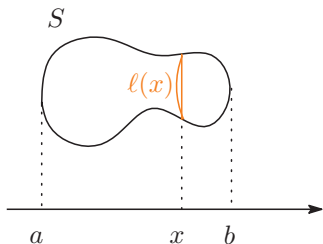
[例 2]

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx &= \int_0^{\infty} x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right)' dx \\ &= \left[ x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} x e^{-2x}\right) + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{4} e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

# 積分法の応用

## 平面図形の面積

### 平面図形の面積 (I)



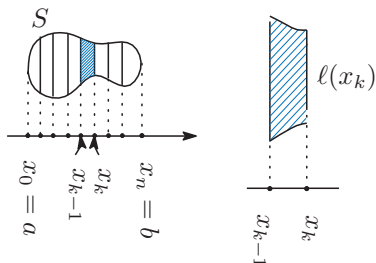
左図のような図形を、点  $(x, 0)$  を通り  $x$  軸に垂直な直線で切った切り口の長さを  $l(x)$  とする.  $l(x)$  が連続であるとき図形の面積  $S$  は

$$S = \int_a^b l(x) dx$$

## 積分法の実用

## 平面図形の面積

[確かめ]



$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

とすると

$$k \text{ 番目の断片の面積} \doteq \ell(x_k) \times \Delta x_k$$

したがって

$$S \doteq \sum_{k=1}^n \ell(x_k) \Delta x_k$$

分割を細かくする極限をとると誤差は0に近づくことが分かっているので

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ell(x_k) \Delta x_k = \int_a^b \ell(x) dx$$

$\ell(x) dx$  は微小長方形の面積であることに注意せよ。

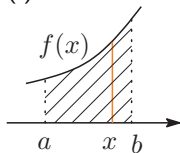
## 積分法的应用

## 平面図形の面積

## 平面図形の面積 (II)

$f(x), g(x)$  : 連続,  $S$  : 斜線部分の面積

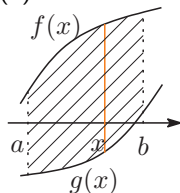
(i)



区間  $[a, b]$  で  $f(x) \geq 0$  であるとき,

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

(ii)



区間  $[a, b]$  で  $f(x) \geq g(x)$  であるとき,

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$



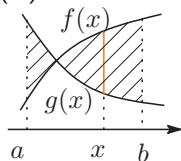
# 積分法の応用

## 平面図形の面積

$f(x), g(x)$  : 連続,  $S$  : 斜線部分の面積

平面図形の面積 (II) 続き

(iii)



区間  $[a, b]$  で  $f(x), g(x)$  の大小関係が一定でないときでも

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

[確かめ]

(i) のとき,  $\ell(x) = f(x)$ ,

(ii) のとき,  $\ell(x) = f(x) - g(x)$ ,

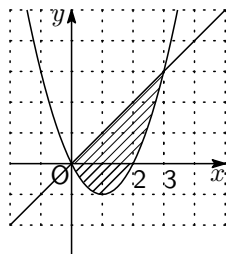
(iii) のとき,  $\ell(x) = |f(x) - g(x)|$

だから。

# 積分の応用

## 平面図形の面積

[例題] 関数  $y = x^2 - 2x \cdots (\star)$  のグラフである放物線と、 $y = x \cdots (\star 2)$  のグラフである直線で囲まれる図形の面積を求めよう。



( $\star$ ) は  $y = x^2 - 2x = x(x - 2)$  だから  $y = 0$  となるのは  $x = 0$  または  $2$  のとき。だから  $x$  軸との交点は  $(0, 0)$  と  $(2, 0)$ 。また  $y = (x - 1)^2 - 1$  だから頂点が  $(1, -1)$  の放物線である。  $y'' = 2 > 0$  だから下に凸。

( $\star 2$ ) は原点をとおり傾き  $1$  の直線。

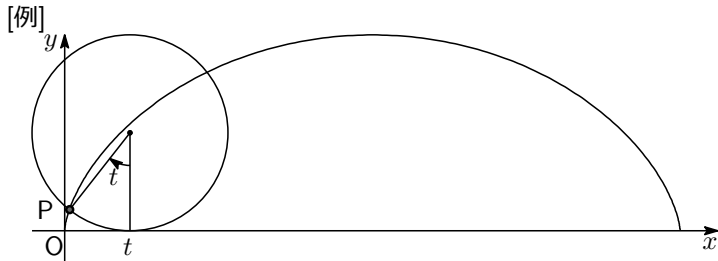
交点の座標は連立方程式  $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = x \end{cases}$  をといて  $(0, 0)$  と  $(3, 3)$ 。

この図形は  $0 \leq x \leq 3$  の範囲にあり、この範囲では ( $\star 2$ ) が ( $\star$ ) の上方にあるから面積は

$$\int_0^3 \{x - (x^2 - 2x)\} dx = \int_0^3 \{-x^2 + 3x\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

# 積分の応用

## 平面図形の面積



$a > 0$  : 定数  $0 \leq t \leq 2\pi$  のとき

$$(*) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

によってパラメータ表示される曲線  $C$  を cycloid (サイクロイド) 曲線 という.  $C$  と  $x$  軸で囲まれた部分  $D$  の面積を求める.

# 積分の応用

## 平面図形の面積

$x, y$  が  $(\star)$  を満たすとき、点  $P(x, y)$  が動いてできる奇跡が  $C$  である.

$$\ell(x) = y = a(1 - \cos t),$$

$x = a(t - \sin t)$  により変数変換すると  $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$  だから

$$dx = a(1 - \cos t)dt$$

だから置換積分により

$$D \text{ の面積} = \int_0^{2\pi a} \ell(x) dx = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2$$