

本日より

1 積分法

- 復習：原始関数と不定積分
- 定積分の考え方
- 定積分の定義
- 定積分の性質
- 微分と積分の関係
- 定積分の部分積分法
- 定積分の置換積分法

積分法

原始関数

復習：原始関数・不定積分の定義

$$F(x) \text{ が } f(x) \text{ の原始関数} \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

$f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ で表すと、すべての原始関数は

$$F(x) + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

で表される。これを $f(x)$ の不定積分とよび

$$\int f(x) dx$$

で表す。定数 C を積分定数という。要するに

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x) dx = F(x) + C$$

定積分法

初めに

[定積分:高校での定義]

$f(x)$ の a から b までの定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{ただし } F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数}$$

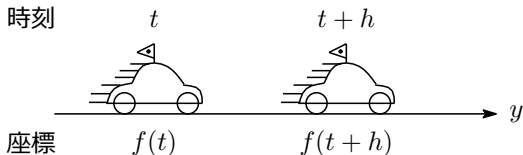
によって **高校では** 定めたのであった。

これでは $\int f(x) dx$ が計算できないとき困るので、原始関数を用いない定義を考える。

定積分法

導入

動点の時刻 t での座標を $y = f(t)$ とする.



このとき

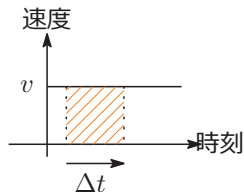
$$(\text{時刻 } t \text{ の) 瞬間の速度 } v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt}$$

今回は逆に $v(t)$ から位置の変化 $f(b) - f(a)$ を知りたい.

定積分法

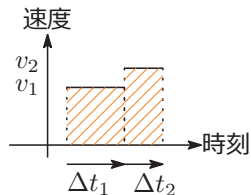
導入

[$v = \text{一定の場合}$] ($v \geq 0$ とする)



位置の変化量 = $v \times \Delta t = \square$ の面積

[v が変化する場合]

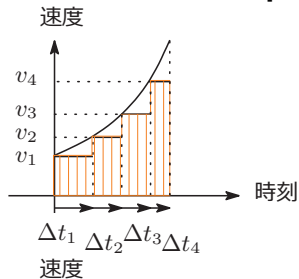


位置の変化量 = $v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 = \square$ の面積

定積分法

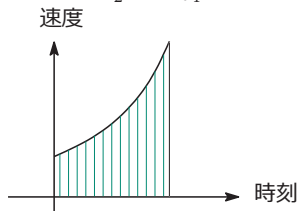
導入

[v が連続的に変化する場合]



位置の変化量

$$\begin{aligned} &\doteq v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + v_3 \Delta t_3 + v_4 \Delta t_4 \\ &= \square \text{の面積} \end{aligned}$$

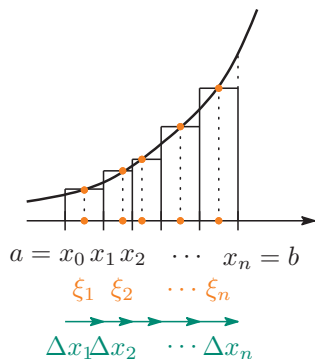


\square の面積

定積分法

定積分の定義

この考え方に沿って定積分を定義する.



$y = f(x)$: 関数 $a < b$ とし,

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

: 区間 $[a, b]$ の分割

$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k, k = 1, \cdots, n$

: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の代表の点

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, \cdots, n$

: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の長さ

とする.

$|\mathcal{P}| = \max_{k=1, \dots, n} |\Delta x_k|$ と定め分割 \mathcal{P} の幅という.

定積分法

定積分の定義

定積分の定義 (I)

$$\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

が $\{x_k\}$, $\{\xi_k\}$ の取り方によらず存在するとき、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で積分可能であるという。この極限を $f(x)$ の a から b までの定積分とよび、 $\int_a^b f(x) dx$ で表す。つまり

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \cdots (*)$$

である。 a を積分の下端、 b を上端という。

定積分法

定積分の定義

定積分の定義 (II)

a を下端, b を上端とするとき, $a > b$ の場合も (*) で定義する. ただしこのとき

$$\mathcal{P} : a = x_0 > x_1 > \cdots > x_n = b$$

$$x_{k-1} \geq \xi_k \geq x_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} (\leq 0), \quad k = 1, \dots, n$$

である.

したがって

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

定積分法

定積分の定義

[例] 定数関数の場合。

$f(x) = c, a \leq x \leq b$ (c は定数) とすると, ξ_k によらず常に $f(\xi_k) = c$,
 $k = 1, \dots, n$ だから

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n c \Delta x_k = c(b-a)$$

したがって

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

定積分法

定積分の定義

[例] $f(x) = x$ ($a \leq x \leq b$) の場合。

$f(x)$ は連続だから積分可能で $\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ が $\{x_k\}, \{\xi_k\}$ の取り方によらず存在することが知られている。そこで特別に

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad \xi_k = x_k, \quad k = 1, \quad \Delta x_k = \frac{b-a}{n}, \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

とすると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) \frac{(b-a)}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n a \frac{(b-a)}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{k(b-a)}{n} \frac{(b-a)}{n} \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &\rightarrow \frac{1}{2}(b-a)(b+a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

定積分法

定積分の定義

したがって

$$\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

定積分法

定積分の性質

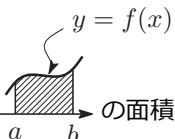
定積分の大事なこと

次のことが知られている。

(I) $f(x)$ が $[a, b]$ で連続 \Rightarrow $[a, b]$ で積分可能

(II) $f(x) \geq 0, a < b$ のとき

$y = f(x)$ のグラフ


$$\int_a^b f(x) dx = \text{の面積}$$

(III) 数直線上の動点の時刻 t での座標を $y = f(t)$, 速度を $v(t)$ とすると

$$\int_a^b v(t) dt = f(b) - f(a) \quad (\text{時刻 } a \text{ から } b \text{ までの位置の変化量})$$

定積分法

定積分の性質

定積分の性質

$$(i) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(y) dy$$

$$(ii) \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(iii) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (\text{ただし } k \text{ は } x \text{ によらない定数})$$

定積分法

定積分の性質

定積分の性質 (続き)

$$(iv) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$(v) \text{ 区間 } [a, b] \text{ で } f(x) \geq g(x) \text{ ならば } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{特に, } f(x) \geq 0 \text{ ならば } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$(vi) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (\text{ただし } a < b \text{ の場合})$$

定積分法

微分と積分の関係

[目標]

1. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ただし $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数

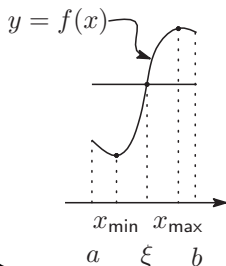
高校ではこれが定義。今回はこれは定理。

2. $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ (微積分学の基本定理)

定積分法

微分と積分の関係

積分の平均値の定理



$f(x) : [a, b]$ で連続

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a), \quad a \leq \xi \leq b$$

となる ξ が存在する.

[確かめ] $f(x)$ は $[a, b]$ で連続だから $[a, b]$ において

最大値 : $M = f(x_{\max})$, 最小値 : $m = f(x_{\min})$

がある. (最大値最小値の定理.)

定積分法

微分と積分の関係

$m \leq f(x) \leq M$ であるから

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx = M(b-a)$$

したがって

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M$$

だから

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)$$

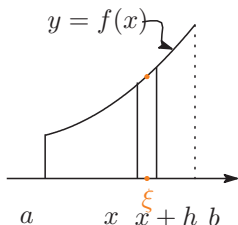
となる ξ が x_{\max} と x_{\min} の間に存在する. (連続関数に対する中間値の定理)

ここに現われる $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$ を区間 $[a, b]$ における関数 $f(x)$ の平均値という.

定積分法

微分と積分の関係

微分積分学の基本定理



$f(x) : [a, b]$ で連続

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$\int_a^x f(t) dt = F(x)$ とおくと $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数になっている。つまり連続関数は原始関数を持つといってよい。

定積分法

微分と積分の関係

[確かめ] 積分の平均値の定理により

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi), \quad x \leq \xi \leq x+h$$

となる ξ があるが, $h \rightarrow 0$ のとき $\xi \rightarrow x$ したがって $f(\xi) \rightarrow f(x)$.

定積分法

微分と積分の関係

定積分と原始関数の関係

$f(x) : [a, b]$ で連続

$F(x) : f(x)$ の原始関数

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \left(\text{これを} = \left[F(x) \right]_a^b \text{と書く} \right)$$

[確かめ] $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおくと $f(x)$ の原始関数になっている. だからある定数 C があって

$$G(x) = F(x) + C.$$

定積分法

微分と積分の関係

$x = a$ を代入して

$$G(a) = F(a) + C.$$

$G(a) = 0$ だから

$$F(a) = -C.$$

$x = b$ を代入して

$$G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

$G(b) = \int_a^b f(t) dt$ だから結論が得られた。

定積分法

定積分の部分積分

定理：定積分の部分積分法

$f(x), g(x)$: 共に微分可能, $f'(x), g'(x)$: 共に連続であるとき

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

定積分法

定積分の部分積分

[確かめ] 不定積分の部分積分法は

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

移項して

$$\iff \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x)$$

両辺定積分して

$$\Rightarrow \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

移項して

$$\iff \int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

定積分法

定積分の部分積分

[例題 6.3.4] 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$ を計算する.

$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$ であるから $\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)' = \cos 2x$ したがって

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)' dx = \left[x \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)' \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) dx \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx = \left[\frac{1}{4} \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

定積分法

定積分の置換積分法

定積分の置換積分法]

$x = \varphi(t) : [\alpha, \beta]$ 上で連続微分可能 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

[確かめ]

$$\int f(x) dx = F(x) \quad \text{とおくと} \Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t))$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b & & \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = [F(\varphi(t))]_{\alpha}^{\beta} \\ = F(b) - F(a) & & = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \end{array}$$

で一致する.

定積分法

定積分の置換積分法

[別証明] $x = \varphi(t)$ のグラフは図のようであるとする.

$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta : t$ の区間 $[\alpha, \beta]$ の分割

$x_k = \varphi(t_k), k = 0, \cdots, n$

ならば

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b : x$ の区間 $[a, b]$ の分割

となる. さらに

$t_{k-1} \leq \xi_k \leq t_k, k = 1, \cdots, n$

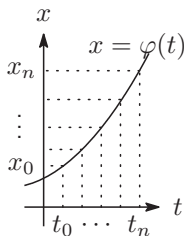
をとり $\eta_k = \varphi(\xi_k)$ とすると $x_{k-1} \leq \eta_k \leq x_k$, また

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta t_k = t_k - t_{k-1}, k = 1, \cdots, n$

とする。

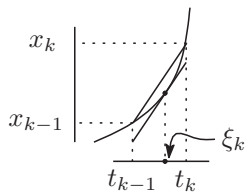
$$\text{左辺} = \lim \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta x_k \quad \text{右辺} = \lim \sum_{k=1}^n f(\varphi(\xi_k)) \varphi'(\xi_k) \Delta t_k$$

となる。



定積分法

定積分の置換積分法



平均値の定理により

$$\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k} = \frac{dx}{dt}(\xi_k) = \varphi'(\xi_k)$$

となるように ξ_k をとることができるから

$$\Delta x_k = \frac{\Delta x_k}{\Delta t_k} \Delta t_k = \varphi'(\xi_k) \Delta t_k$$

としてよい. したがって

右辺 = 左辺.

定積分法

定積分の置換積分法

[例題] $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$ は定数) を求める。

$$\left(\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \text{ は利用しない。} \right)$$

$x = a \sin t$, $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ とおく. このとき $\cos t \geq 0$ だから

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \sqrt{\cos^2 t} = a \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = a \cos t \text{ だから}$$

$$dx = \frac{dx}{dt} dt = a \cos t dt,$$

定積分法

定積分の置換積分法

また

x が 0 から a まで動くとき t は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動く

となる. だから

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt$$

$$\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2} \text{ だから}$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = a^2 \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$