本日やること

1. 積分法
    - 三角関数の有理関数の積分法
    - 逆三角関数 (その 2)
    - 二次無理関数の有理関数

積分法

復習：いろいろな初等関数の原始関数

初等関数の導関数は初等関数である。

初等関数の原始関数は初等関数とは限らない。

[原始関数が初等関数となる関数の例]

有理関数：$F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $(P(x), Q(x)$ は x の多項式) $\longrightarrow$ 第 5 回でやった。

三角関数の有理関数：$\dfrac{1}{\sin x + \cos x + 1}$ など。$\longrightarrow$ 本日やる。

二次無理関数の有理関数：$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ など。$\longrightarrow$ 本日やる。

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[例] $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ を使う。

$$\int \sin^2 x\,dx$$

[例] $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x$ を使う。

$$\int \sin^3 x\,dx$$

積分法

三角関数の有理関数の積分法

$R(X,Y)$: X,Y の有理関数 $\Rightarrow$ $\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ は初等関数になる。

なぜなら

三角関数の有理関数の積分法

$$\tan\frac{x}{2} = t \qquad (-\pi < x < \pi)$$

によって積分変数を x から t に変換すると

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$ だから

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

のように t の有理関数の積分に帰着されるからである。

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[確かめ]　$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割って　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

2 倍角の公式により

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

また

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1+t^2}{2}$$

より

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[例]

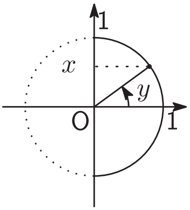
$$\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t}$$

$$= \log|1+t| = \log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|$$

積分法

逆三角関数 (その 2)

逆三角関数 $\sin^{-1}$ の定義



$$y = \sin^{-1} x, \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

であることを

$$x = \sin y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

でさだめる。

積分法

逆三角関数 (その 2)

逆三角関数 $\sin^{-1}$ の導関数

a を正の定数とするとき

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\qquad\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

二次無理関数の有理関数の積分

$R(X, Y)$ を X, Y の有理関数とするとき, $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x \text{ の二次関数}})\, dx$ は初等関数になる。

証明は省略する。重要な例を説明しよう。

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

[例] a が正の定数のとき

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}.$$

を示す

$x = a\sin t$, $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと, この区間では $\cos t \geqq 0$ であり

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\cos t, \qquad \frac{dx}{dt} = a\cos t \ \text{より}\ dx = a\cos t\, dt$$

であるから

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a^2\ \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt$$
$$= a^2 \left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right) = a^2 \left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{t}{2}\right).$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

ところで

$$\sin t = \frac{x}{a},\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2},\ t = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

であるから

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

[例]

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \log(x+\sqrt{x^2+1})$$

を示す.

$x = \tan t,\quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと, この区間では $\cos t > 0$ であり

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{1}{\cos t}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ より } dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

であるから

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\cos t}\,dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt$$

積分法
二次無理関数の有理関数の積分

$s = \sin t$ とおくと $ds = \cos t dt$ だから

$$= \int \frac{ds}{1-s^2} = -\frac{1}{2}\log|s-1| + \frac{1}{2}\log|s+1| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin t + 1}{\sin t - 1}\right|$$

$\sin t = \dfrac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ だから

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right| = \log(x+\sqrt{x^2+1})$$