本日やること

1. 積分法
   - 復習：原始関数と不定積分
   - 復習：不定積分の置換積分法
   - 不定積分の部分積分法
   - いろいろな初等関数の原始関数
   - 部分分数分解
   - 有理関数の積分
   - 逆三角関数 (その 1)

積分法

原始関数

復習：原始関数・不定積分の定義

$F(x)$ が $f(x)$ の**原始関数** $\iff$ $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$

$f(x)$ の**不定積分** $\displaystyle\int f(x)\,dx$ は

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

積分法

主な関数の不定積分

(i) $\displaystyle \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$

(ii) $\displaystyle \int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$

(iii) $\displaystyle \int e^{x}\,dx = e^{x} + C$

(iv) $\displaystyle \int \sin x\,dx = -\cos x + C = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$

(v) $\displaystyle \int \cos x\,dx = \sin x + C = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$

今後積分定数 C は省略することにする.

積分法

不定積分の性質：線形性

不定積分の性質：線形性

(i) $\displaystyle \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

(ii) $\displaystyle \int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$　(k は定数)

積分法

不定積分の置換積分法

[置換積分法の例]　$\int (2x+3)^3\,dx$ を計算する。

$$2x+3=t \cdots ♠$$

とおく。両辺 x で微分して

$$2=\frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{2}$ をかけて

$$dx=\frac{dt}{2} \cdots \heartsuit$$

♠, ♡ で置き換えて

$$\int (2x+3)^3\,dx = \int t^3\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^3\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} = \frac{(2x+3)^4}{8}$$

積分法

不定積分の部分積分法

定理：不定積分の部分積分法＝積の積分法

$f(x)$, $g(x)$ ：共に微分可能， $f'(x)$, $g'(x)$ ：共に連続であるとき

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

[確かめ] 積の微分法の逆である。

積の微分法 ： $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

両辺を積分 ：
$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx \\ &= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx \end{aligned}$$

右辺第 2 項を移項すれば，

$$f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx$$

積分法

不定積分の部分積分法

[例題] (1) $f'(x) = e^x$, $g(x) = x$ とおくと $f(x) = \int e^x\,dx = e^x$ だから

$e^x = (e^x)'$ したがって

$$\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int (x)'e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

(2) $f'(x) = 1$, $g(x) = \log x$ とおくと,

$f(x) = \int 1\,dx = x$ だから $1 = (x)'$,

また $g'(x) = (\log x)' = \dfrac{1}{x}$ であるから

$$\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int x(\log x)'\,dx$$
$$= x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x.$$

積分法

いろいろな初等関数の原始関数

初等関数の導関数は初等関数である。

初等関数の原始関数は初等関数とは限らない。

[原始関数が初等関数となる関数の例]

有理関数：$F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$，($P(x)$, $Q(x)$ は x の多項式)

三角関数の有理関数：$\dfrac{1}{\sin x + \cos x + 1}$ など。

二次無理関数の有理関数：$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ など。

積分法

部分分数分解

部分分数分解

任意の有理関数

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (P(x), Q(x) \text{ は } x \text{ の多項式})$$

は，$P(x)$ の次数 $<$ $Q(x)$ の次数　のとき，より簡単な分数式の和の形に表される．これを部分分数分解という．

[例]　両辺は恒等的に等しい。

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+2x+2}$$

積分法

部分分数分解

[部分分数分解の方法]

(Step 1) 分母 $Q(x)$ を

(Type 1) $(x-a)^n$, (a 実数, $n=1,2,\cdots$)
(Type 2) $(x^2+bx+c)^m$ (b, c 実数, $b^2<4c$, $m=1,2,\ldots$)

の積に因数分解する。(これは必ずできる。(Type 2) は実数の範囲ではこれ以上分解できない。)

(Step 2)

(Type 1) に対して $\dfrac{p(x)}{(x-a)^n}\cdots\heartsuit$, $p(x)$ は分母より低次の多項式

(Type 2) に対して $\dfrac{q(x)}{(x^2+bx+c)^m}\cdots\clubsuit$, $q(x)$ は分母より低次の多項式

(Step 3) $\heartsuit, \clubsuit$ を総和したものが $F(x)$ と一致するように $p(x)$, $q(x)$ を決定する。(これも必ずできることが知られている。)

積分法

部分分数分解

[例題 6.2.1] $\dfrac{3x+8}{x^3+4x}$ を部分分数分解する。

(Step 1) 分母の因数分解：

$x^3+4x = x(x^2+4)$ (実数の範囲ではこれ以上因数分解できない.)

(Step 2)

$$\frac{3x+8}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \quad (x \text{ の恒等式})$$

となる定数 A, B, C があることが分かっている。

積分法

部分分数分解

(Step 3) 未定係数 A, B, C を決定する。右辺を通分して和をとると

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)x}{x(x^2+4)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)}.$$

分子どうしを比較して

$$3x+8 = (A+B)x^2 + Cx + 4A \quad (x \text{ の恒等式}).$$

「2 つの多項式が恒等的に等しくなる必要十分条件は同じ次数の項の係数どうしがすべて等しいこと」であるから

$$A+B=0, \quad C=3, \quad 4A=8$$

これを解いて $A=2$, $B=-2$, $C=3$, したがって

$$\frac{3x+8}{x^3+4x} = \frac{2}{x} + \frac{-2x+3}{x^2+4}$$

積分法

有理関数の積分

有理関数の積分

有理関数の積分は部分分数分解と適当な変数変換により

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}$

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

の和に帰着する。

積分法

有理関数の積分

(i) は $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \log|x-a| & n=1 \\ -\frac{n}{(x-a)^{n+1}} & n \geqq 2 \end{cases}$

(ii) は $x^2+a^2=t$ とおいて変数変換すれば $dx = \dfrac{dt}{2x}$ だから

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{x\,dt}{2x \cdot t^n} = \frac{1}{2}\int t^{-n}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\log|x^2+a^2| & n=1 \\ -\frac{1}{2}\frac{n}{(x^2+a^2)^{n+1}} & n \geqq 2 \end{cases}$$

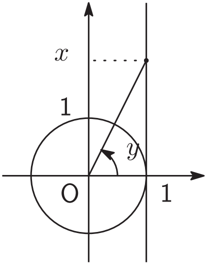
(iii) は $n=1$ の場合のみ述べる。

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ →演習

積分法

逆三角関数 (その 1)

逆三角関数 $\tan^{-1}$ の定義



$$y = \tan^{-1} x, \quad (-\infty < x < \infty)$$

であることを

$$x = \tan y, \quad (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

でさだめる。

積分法

逆三角関数 (その 1)

逆三角関数 $\tan^{-1}$ の導関数

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a^2+x^2}$$

[確かめ] $\dfrac{x}{a}=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\tan^{-1}t$$

第 5 回にやったことを用いて

$$=\frac{1}{a}\frac{1}{1+t^2}=\frac{a}{a^2+x^2}.$$

積分法

有理関数の積分

[例題 6.2.2]

$$\int \frac{3x+8}{x^3+4x}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{3}{x^2+4}\,dx$$
$$= 2\log|x| - \log(x^2+4) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right).$$