本日やること

1. 積分法
   - 原始関数と不定積分
   - 不定積分の置換積分法

積分法

初めに

[積分とは何か]

微分と逆の演算

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "\text{微分}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\text{積分}"] \end{tikzcd}$$

[目的]

1. 微分方程式を解くこと。(不定積分)
2. 面積・体積・質量の計算。　道のりの計算 (定積分)

(逆に　密度の計算　速度の計算は微分法であった　)

積分法
原始関数

原始関数の定義

$F(x)$ が $f(x)$ の**原始関数** $\iff$ $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$

[例]

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^3+1) = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^3-5) = 3x^2, \ldots$$

であるから x^3, x^3+1, $x^3-5, \ldots$ は $3\,x^2$ の原始関数である.

積分法

原始関数はどれだけあるか

$f(x)$ の 原始関数の 1 つを $F(x)$ で表すと，そのほかの原始関数 $G(x)$ は適当な定数 C を用いて $F(x)+C$ で表される．

[確かめ]

$$(F(x)-G(x))' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$$

であるが，

「ある区間で導関数の値が常に 0 $\Leftrightarrow$ 関数は定数関数」(定理 5.9)

だから $F(x)-G(x)$ は定数関数となる．

積分法

不定積分

不定積分の定義

$f(x)$ の 原始関数の 1 つを $F(x)$ とし, C を任意の定数とするとき, $F(x)+C$ を $f(x)$ の不定積分とよび

$$\int f(x)\,dx$$

で表す。定数 C を積分定数という. 不定積分を求めることを $f(x)$ を積分するという.

まとめると

微分と不定積分の関係

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

無数の原始関数を象徴的に 1 つの式で表したものと思ってほしい。

積分法

主な関数の不定積分

(i) $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$

(ii) $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$

(iii) $\displaystyle\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$

(iv) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$

(v) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$

今後積分定数 C は省略することにする.

積分法

主な関数の不定積分

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^2 = x$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2} = x \qquad \Leftrightarrow d\left(\frac{x^2}{2}\right) = x\,dx$$

$$\Updownarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{x^2}{2} + C = \int x\,dx \qquad \Leftrightarrow \int d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \int x\,dx$$

積分法

主な関数の不定積分

[(i) の確かめ] $a \neq 0$ とする。

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{a}\frac{d}{dx}x^{a-1} = x^{a-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\frac{x^a}{a} = x^{a-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^a}{a} + C = \int x^{a-1}\,dx$$

$a - 1 = \alpha$ とおくと $a = \alpha + 1$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \int x^{\alpha}\,dx$$

ただし $\alpha \neq -1$

積分法
主な関数の不定積分

[(ii) の確かめ] $\alpha = -1$ のときは $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ であるが特別あつかい。

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x} \quad\Leftrightarrow\quad \log|x| + C = \int \frac{1}{x}\,dx$$

[(iv) の確かめ]

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \quad\Leftrightarrow\quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C = \int \sin x\,dx$$

積分法

不定積分の性質：線形性

不定積分の性質：線形性

(i) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(ii) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$　(k は定数)

積分法

不定積分の性質：線形性

[(i) の確かめ]

$$
\begin{aligned}
&\int f(x)\,dx = F(x) + C_1 \text{とおく} &&\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \\
&\int g(x)\,dx = G(x) + C_2 \text{とおく} &&\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}G(x) = g(x) \\
& && \qquad\quad \Downarrow \\
& && \quad\ \ \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}G(x) = f(x) + g(x) \\
& && \qquad\qquad\quad \| \\
&\int (f(x) + g(x))\,dx &&\Leftarrow \quad \frac{d}{dx}\left(F(x) + G(x)\right) = f(x) + g(x) \\
&\qquad = F(x) + G(x) + C_3 &&
\end{aligned}
$$

積分法

不定積分の置換積分法

[複雑な関数の積分法]

不定積分の定義

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x)\ (+C) \cdots (\star)$$

したがって

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) = x^3 \text{ だから } \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$$

でも

$$\int (2x+3)^3\,dx = \frac{(2x+3)^4}{4}$$ は誤り

積分法

不定積分の置換積分法

正しくは, $2x+3=t$ とおくと合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x+3)^4}{4}\right)=\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{t^4}{4}\right)=2\cdot t^3=2\cdot(2x+3)^3$$

だから $\displaystyle\int 2\cdot(2x+3)^3\,dx=\frac{(2x+3)^4}{4}$

だから $\displaystyle\int (2x+3)^3\,dx=\frac{(2x+3)^4}{2\cdot 4}$

積分法
不定積分の置換積分法

[一般化]

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

のとき x を $\varphi(x)$ でおきかえると $\varphi(x) = t$ とおいて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}\left(F(\varphi(x))\right) = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}F(t)$$

$(\star)$ より $\frac{d}{dt}F(t) = f(t)$ だから

$$= \varphi'(x)f(t) = \varphi'(x)f(\varphi(x))$$

だから

$$\int \varphi'(x)f(\varphi(x))\,dx = F(\varphi(x)) = F(t) = \int f(t)\,dt$$

積分法

不定積分の置換積分法

まとめると

定理：不定積分の置換積分法

(i) 関数 $f(x)$ が原始関数をもち, $t = \varphi(x)$ が微分可能であるとき

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

(ii) $x = \psi(t)$ が微分可能であるとき

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt.$$

(i), (ii) により x の関数の x による積分を t の関数の t による積分に置き換えること,(あるいはその逆) を積分変数の変換または置換積分法という。
(ii) は (i) で x を t に, φ を ψ に置き換えたもの。

積分法

不定積分の置換積分法

[置換積分法の考え方] (i) も (ii) も次のことをしている。

(I) $t=\varphi(x)$ または $x=\psi(t)$ となる変数 t を考え,
$\varphi(x)$ を t で, または x を $\psi(t)$ でおきかえる。

(II) (i) の場合 $t=\varphi(x)$ を x で微分して $\dfrac{dt}{dx}=\varphi'(x)$, 両辺に $\frac{dx}{\varphi'(x)}$ をかけて

$$dx=\frac{dt}{\varphi'(x)},$$

(ii) の場合 $x=\psi(t)$ を t で微分して $\dfrac{dx}{dt}=\psi'(t)$, 両辺に dt をかけて

$$dx=\psi'(t)dt,$$

(III) 以上により x, dx を t, dt でおきかえる。

このおきかえで $\displaystyle\int$ (t の関数) dt の形になると, 積分がうまくいく場合がある。

積分法

不定積分の置換積分法

[例 1] $\displaystyle\int (2x+3)^3\,dx$ を計算する。

$$2x+3=t\cdots♠$$

とおく。両辺 x で微分して

$$2=\frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{2}$ をかけて

$$dx=\frac{dt}{2}\cdots♡$$

♠, ♡ で置き換えて

$$\int (2x+3)^3\,dx=\int t^3\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^3\,dt=\frac{1}{2}\frac{t^4}{4}=\frac{(2x+3)^4}{8}$$

積分法

不定積分の置換積分法

[例 2] $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ を計算する。

$$x^2+1=t\cdots\spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$2x=\frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{2x}$ をかけて

$$dx=\frac{dt}{2x}\cdots\heartsuit$$

$\spadesuit$, $\heartsuit$ で置き換えて

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx=\int \frac{x}{t}\,\frac{dt}{2x}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{2}\log t=\frac{1}{2}\log|x^2+1|$$

積分法

不定積分の置換積分法

[例 3]　$\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$ を計算する。

$$\sin x = t \cdots \spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{\cos x}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{\cos x} \cdots \heartsuit$$

$\spadesuit$, $\heartsuit$ で置き換えて

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1+t}\,\frac{dt}{\cos x} = \int \frac{1}{1+t}\,dt = \log|1+t| = \log|1+\sin x|$$