本日やること

1. 微分係数・導関数
   - 高階導関数
2. 微分法の応用
   - 近似多項式

微分法

主な関数の高階導関数

べき関数の高階導関数

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{\alpha},\ (\alpha \text{ は実数の定数 }) \text{のとき} \\
f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \\
f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{(\alpha-n)}
\end{aligned}
$$

例えば $f(x) = x^4$ のとき

$$
f'(x) = 4x^3,\quad f''(x) = 4\cdot 3x^2,\quad f'''(x) = 4\cdot 3\cdot 2x,\quad f^{(4)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4!
$$

微分法

主な関数の高階導関数

指数関数・対数関数の高階導関数

(i) $f(x)=e^x$ のとき　　$f^{(n)}(x)=e^x,\ (n=1,2,\cdots)$

(ii) $f(x)=\log x\ (x>0)$ のとき　　$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$

(i) は $(e^x)'=e^x$ だから。　(ii) は

$$
\begin{aligned}
(\log x)' &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
(\log x)'' &= (x^{-1})' = (-1)x^{-2} \\
(\log x)''' &= ((-1)x^{-2})' = (-1)(-2)x^{-3} \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

だから

微分法

主な関数の高階導関数

三角関数の高階導関数

$$f(x) = \sin x \text{ のとき } f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$
$$f(x) = \cos x \text{ のとき } f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) = \sin x \text{ のとき}$$
$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin t \quad \left(x + \frac{\pi}{2} = t \text{ とおいた}\right)$$
$$f''(x) = \frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t\frac{dt}{dx} = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \times 1 = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$
$$\vdots$$

これをくりかえす。$\cos x$ のときも同様。

微分法の応用

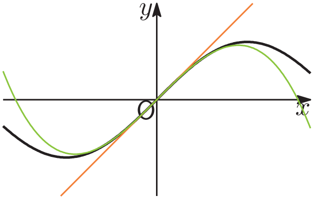
近似多項式

[目標] 関数 $y = f(x)$ を $x = 0$ の近くで x の多項式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \quad (a_0, a_1, a_2 \cdots \text{ は定数})$$

で近似したい。そのため高階微分係数を利用する。

[例：$\sin x$ の近似多項式]



$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sin x \fallingdotseq 0$ (0 次近似)

$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sin x \fallingdotseq x$ (1 次近似)

$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sin x \fallingdotseq x - \dfrac{x^3}{6}$ (3 次近似)

微分法の応用

近似多項式

準備：多項式の係数

x の n 次多項式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ は定数})$$

に対して

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

が成り立つ.

微分法の応用

近似多項式

[確かめ]

$$
\begin{aligned}
P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \\
P'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} \\
P''(x) &= 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} \\
P'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \\
&\vdots \\
P^{(n)}(x) &= n! a_n
\end{aligned}
$$

だから $x = 0$ を代入すると

$$
P(0) = a_0, \quad P'(0) = a_1, \quad P''(0) = 2! a_2, \quad P'''(0) = 3! a_3, \cdots \quad P^{(n)}(0) = n! a_n
$$

微分法の応用

近似多項式

Maclaurin 近似多項式の定義

関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき、x の n 次多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \cdots (A)$$

を $f(x)$ の n 次 Maclaurin 近似多項式という.

(A) は

$$P(0) = f(0),\ P'(0) = f'(0),\ P''(0) = f''(0), \cdots, P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)\ \ \cdots (B)$$

を満たすただ一つの n 次多項式である。
(B) により

$$x \fallingdotseq 0 \ \Rightarrow\ f(x) \fallingdotseq P(x)\ \ \cdots (C)$$

であることが予想されるが、実際次が成り立つ。

微分法の応用

近似多項式

Macraulin の定理

$f(x)$: 区間 (a, b) ($a < 0 < b$) で $n+1$ 回微分可能,
$P(x)$: $f(x)$ の n 次 Maclaurin 近似多項式,
とするとき, 近似の誤差を

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P(x), \quad a < x < b$$

で定めると,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

と表される. ここで θ ($0 < \theta < 1$) は x と n で決まる適当な実数。

f が $n+1$ 回連続微分可能ならば $\lim_{x \to 0} \frac{R_{n+1}(x)}{x^n} = 0$ となり $R_{n+1}(x)$ は非常に小さい誤差であるといえる。

微分法の応用

近似多項式

Taylor 近似多項式

関数 $f(x)$ が n 回微分可能とし、a を定義域内の点とするとき x の n 次多項式

$$P(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{2!}(x-a)^n\cdots(A)$$

を $f(x)$ の $x=a$ における n 次 Taylor 近似多項式という.

(A) は

$$P(a)=f(a),\ P'(a)=f'(a),\ P''(a)=f''(a),\cdots,P^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)\ \cdots(B)$$

を満たすただ一つの n 次多項式である。

(B) により

$$x\fallingdotseq a\ \Rightarrow\ f(x)\fallingdotseq P(x)\ \cdots(C)$$

であることが予想されるが、実際次が成り立つ。

微分法の応用

近似多項式

Taylor の定理

$f(x)$: a を含む開区間で $n+1$ 回微分可能,
$P(x)$: $f(x)$ の $x=a$ における n 次 Taylor 近似多項式,
とするとき, 近似の誤差を

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P(x), \quad a < x < b$$

で定めると,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

と表される. ここで θ $(0<\theta<1)$ は x と n で決まる適当な実数。

微分法の応用
近似多項式

e^x の Maclaurin 近似多項式

$f(x) = e^x$ の n 次の Maclaurin 近似多項式は

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

である。

[確かめ]　$f(x) = e^x$ とおくと,

$f^{(k)}(x) = e^x$,　だから　$f^{(k)}(0) = 1$, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

これを (A) に代入すればよい。

微分法の応用

近似多項式

$\sin x$ の Maclaurin 近似多項式

$f(x) = \sin x$ の n 次の Maclaurin 近似多項式は $n = 2k-1$ または $2k$ のとき

$$P_n(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

である。

[確かめ]　$f(x) = \sin x$ とおくと, $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$,　だから

$$f^{(k)}(0) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ は偶数} \\ 1, & k = 1, 5, 9, \cdots \\ -1, & k = 3, 7, 11, \cdots \end{cases}$$

これを (A) に代入すればよい。

微分法の応用
近似多項式

$\cos x$ の Maclaurin 近似多項式

$f(x) = \cos x$ の n 次の Maclaurin 近似多項式は $n = 2k$ または $2k+1$ のとき

$$P_n(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

である。

[確かめ]　$f(x) = \cos x$ とおくと, $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$,　だから

$$f^{(k)}(0) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ は奇数} \\ 1, & k = 0, 4, 8, \cdots \\ -1, & k = 2, 6, 10, \cdots \end{cases}$$

これを (A) に代入すればよい。

微分法の応用

近似多項式

$\log(1+x)$ の Maclaurin 近似多項式

$f(x) = \log(1+x)$ の n 次の Maclaurin 近似多項式は

$$P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

である。

微分法の応用
近似多項式

[$\sin x$ の Maclaurin 近似多項式]