本日やること

1. 微分係数・導関数
    - 対数微分法
    - 三角関数の導関数
    - 逆三角関数
    - パラメータ表示された関数とその微分法

初等関数の導関数

対数微分法

定理 4.13　対数微分

関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

[確かめ]　$t = f(x)$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \left(\frac{d}{dt}\log|t|\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

初等関数の導関数

対数微分法

[例] $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α：実数の定数) の証明。

$y = x^\alpha$ とおき両辺の対数をとると,

$$\log y = \log x^\alpha = \alpha \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

したがって

$$y' = \frac{\alpha}{x} \times y = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

初等関数の導関数

三角関数の導関数

[目標]

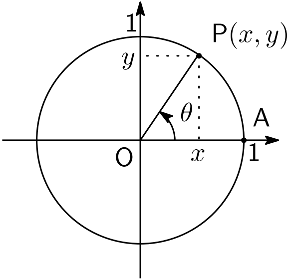
(i) $(\cos x)' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$

(ii) $(\sin x)' = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

初等関数の導関数

三角関数の導関数

復習 三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1, 0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし，P の座標を (x, y) とするとき

$\cos\theta = x$: 余弦

$\sin\theta = y$: 正弦

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$: 正接

と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

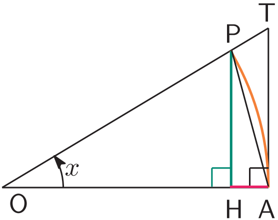
また，これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という.

初等関数の導関数

三角関数の導関数

三角関数の基本極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



[確かめ] $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $x\to +0$ とする.

PH$=\sin x$, 弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PA}}=x$, TA $=\tan x$

△OPA, 扇型 OPA, △OTA の面積を比較

$$0<\frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\tan x\ \left(=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

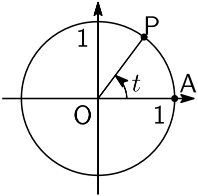
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

$\cos x\to 1$ であるからはさみうちの原理により $\frac{\sin x}{x}\to 1$　$x\to -0$ の場合も同様.

初等関数の導関数

三角関数の導関数

等速円運動



動点 P は原点中心半径 1 の円周上を角速度 1 (rad/sec) で回転している。

$t=0$ のとき P=A

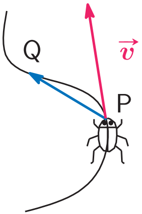
ならば

時刻 t の P の座標 $=(\cos t, \sin t)$

初等関数の導関数

三角関数の導関数

運動する点の速度ベクトル



平面の動点の軌跡は曲線となる。
時刻 t のとき P,
時刻 $t+h$ のとき Q
とするとき時刻 t のときの P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を

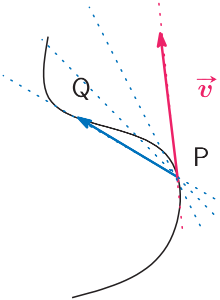
$$\vec{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h}$$

で定める。

初等関数の導関数

三角関数の導関数

速度ベクトルの性質



(i) $\vec{v}(t)$ の向きは曲線の接線方向

(ii) $\vec{v}(t)$ の大きさは動点の速度

(iii) P の座標を $(x(t), y(t))$ とすると

$$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$$

初等関数の導関数

三角関数の導関数

[確かめ] (i) 直線 PQ は接線の方向に近づいていくから $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h}$ の方向は接線方向。

(ii) $\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h}\right| \fallingdotseq \left|\dfrac{\text{PQ 間の曲線の長さ}}{h}\right|$ = 平均の速さ であり, $h\to 0$ とすると ≒ が = に近づくと考えられるから。

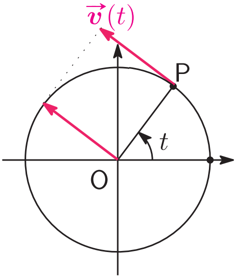
(iii)

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x(t+h)-x(t), y(t+h)-y(t))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}, \frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right) \\
&= \left(\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right) \\
&= (x'(t), y'(t))
\end{aligned}$$

初等関数の導関数

三角関数の導関数

等速円運動の速度ベクトル

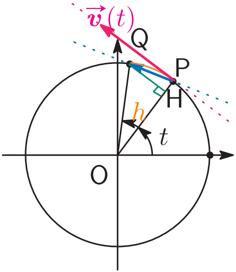


原点中心半径 1 の円周上を角速度 1 (rad/sec) で回転している点 P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ は

$$\vec{v}(t) = \left(\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= (-\sin t, \cos t) \cdots (\star)$$

初等関数の導関数

三角関数の導関数



[確かめ]　(i) $\vec{v}(t)$ の向きは接線方向で正の回転の向きである．なぜなら直線 PQ は $h \to 0$ のとき接線に近づくから。

(ii) $\vec{v}(t)$ の大きさは 1 である．なぜなら

$$\frac{\mathrm{QH}}{h} = \frac{\sin h}{h} \leqq \left| \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h} \right| \leqq \frac{\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}}{h} = 1$$

かつ $\dfrac{\sin h}{h} \to 1$ だから。

(i), (ii) より $\vec{v}(t)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos t, \sin t)$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したものだから $(\star)$ がわかる.

初等関数の導関数

三角関数の導関数

三角関数の導関数

(i) $(\cos x)' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$

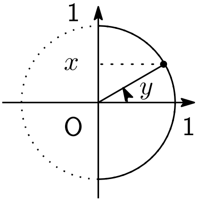
(ii) $(\sin x)' = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

[確かめ]　前節より明らか。

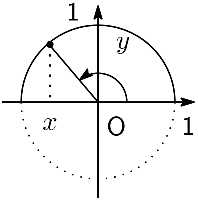
初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

逆三角関数の定義



$$y = \sin^{-1} x, \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$
$$\iff$$
$$x = \sin y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

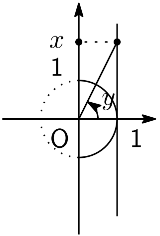


$$y = \cos^{-1} x, \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$
$$\iff$$
$$x = \cos y, \quad (0 \leqq y \leqq \pi)$$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

逆三角関数の定義



$$y = \tan^{-1} x, \ \ (-\infty < x < \infty)$$

$$\iff$$

$$x = \tan y, \ \ \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

逆三角関数の導関数

(i) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$

(ii) $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$

(iii) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad (-\infty < x < \infty)$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

[(i) の確かめ] $y = \sin^{-1} x$ とおくと $x = \sin y$.

$$-1 < x < 1 \ \Rightarrow \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \cos y > 0$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \sin y = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} > 0$$

であるから逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

[(iii) の確かめ] $y = \tan^{-1} x$ とおくと $x = \tan y$.

$$\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{ だから } \cos y > 0$$

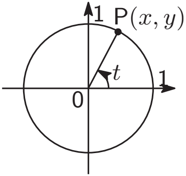
$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \tan y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2 > 0$$

であるから逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

初等関数の導関数

パラメータ表示された関数とその微分法



I は区間, 関数 $f(t)$, $g(t)$ はともに連続とする. 点 P の座標 (x, y) が

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (t \in I) \qquad \cdots (\star)$$

を満たすとき, t が変化したときの点 P の軌跡は平面内の曲線を表す. これを曲線のパラメータ (または媒介変数) 表示といい, 変数 t をパラメータ (または媒介変数) という.
例えば

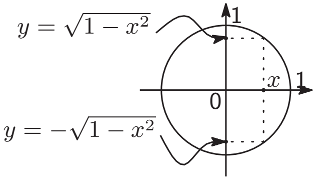
$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (t \in I) \qquad \cdots (\star 2)$$

は図のような単位円のパラメータ表示である。

初等関数の導関数

パラメータ表示された関数とその微分法

区間 I を適当にとると, x に対して $(\star)$ を満たす t, y がただ一つ決まることがあり, これによって関数 $x \mapsto y$ が決まる. これをパラメータ表示された関数という.



$(\star 2)$ の場合は

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

である。

初等関数の導関数

パラメータ表示された関数とその微分法

パラメータ（媒介変数）表示された関数の微分法

関数 $x = f(t)$, $y = g(t)$ および f の逆関数 $t = f^{-1}(x)$ が存在して，すべて微分可能であるとする．このとき関数 $x \mapsto y$ も微分可能で，$\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ である点で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

である．

証明　$x \mapsto y$ は合成関数 $y = g(f^{-1}(x))$ であるから逆関数の微分法と合成関数の微分法を組み合わせれば証明できる． $\square$