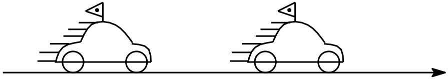
本日やること

- べき関数の導関数
- 定数倍・和の微分法
- 積・商の微分法
- 合成関数の微分法
- 逆関数の微分法
- 指数関数・対数関数の導関数
- 対数微分法

復習：微分係数・導関数

復習：微分係数・導関数

時刻　　a　　$a+h$



座標　　$f(a)$　　$f(a+h)$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

a における微分係数　　a は定数

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

導関数　　x は変数

[初等関数]
$+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt[n]{\ \ }$, 三角関数, 逆三角関数, 指数関数, 対数関数を組み合わせて作られるような関数.

初等関数の導関数は初等関数。 (これから確かめます)

初等関数の導関数

べき関数の導関数

定数関数・x・x^2 の導関数

(i) $\alpha = 0$ のときは $f(x) = C$ （定数関数）で $(C)' = 0$

(ii) $\alpha = 1$ のときは $f(x) = x$ で $(x)' = 1$

(iii) $\alpha = 2$ のときは $f(x) = x^2$ で $(x^2)' = 2x$

[確かめ]

(i) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

(ii) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

(iii) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{2xh + h^2}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

階乗・順列・組み合わせ

$n = 0, 1, 2, \cdots, \quad 0 \leqq k \leqq n$ に対して

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \text{ のとき}, \\ 1 \times 2 \times \cdots \times n, & n \geqq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

階乗

$${}_n\mathsf{P}_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

n 個のものから k 個取り出してならべる順列の数

$${}_n\mathsf{C}_k = \frac{{}_n\mathsf{P}_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

n 個のものから k 個取り出す組み合わせの数

初等関数の導関数

べき関数の導関数

二項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_n a^n + {}_n\mathrm{C}_{n-1} a^{n-1} b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_0 b^n \quad = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \, a^{n-k} b^k$$

[確かめ]　$(a+b)^n$ を展開すると

$$\begin{array}{ccccc} (a+b) & (a+b) & (a+b) & \cdots & (a+b) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ a & b & a & \cdots & a \end{array} \quad \text{取り出す}$$

のように各 $(a+b)$ から a, b の一方を取り出してかけ合わせたものの総和になる。

a を k 個 b を $n-k$ 個取り出す場合の数は ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ だから正しい。

初等関数の導関数

べき関数の導関数

x^n の導関数

$f(x) = x^n \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ のとき $f'(x) = nx^{n-1}$　つまり

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

[確かめ] $f(x) = x^n$ だから $f(x+h) = (x+h)^n$. ここで

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

だから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + (h \text{ について 2 次以上の項})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + (h \text{ について 1 次以上の項})) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

$\dfrac{1}{x}$ の導関数

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ のとき $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ つまり

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \quad (x \neq 0 \text{ のとき})$$

[確かめ] $f(x) = \dfrac{1}{x}$ だから $f(x+h) = \dfrac{1}{x+h}$ で

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

$\sqrt{x}$ の導関数

$f(x)=\sqrt{x}$ のとき $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 　つまり

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x\neq 0 \text{ のとき})$$

[確かめ] $f(x)=\sqrt{x}$ だから $f(x+h)=\sqrt{x+h}$ で

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{(x+h)-x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

まとめると

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x^{-1})' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} = (-1)x^{-2} = -1x^{-1-1}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

だから

べき関数の導関数

$f(x) = x^\alpha$ (α は定数) のような関数をべき関数という。べき関数の導関数は

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha\text{は実数の定数}$$

証明は後回しにします。

初等関数の導関数

べき関数の導関数

[例]

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

初等関数の導関数

定数倍・和の微分法

定理 4.6 (定数倍・和の微分法)

$f(x)$, $g(x)$ ：微分可能， k ：定数 $\Rightarrow$ $kf(x)$, $f(x)+g(x)$ も微分可能で

(i) $(kf(x))' = kf'(x)$

(ii) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

[(ii) の確かめ]

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \text{右辺}
\end{aligned}
$$

初等関数の導関数

定数倍・和の微分法

[例]

$$\begin{aligned}(2x^3+4x-3)' &= (2x^3)' + (4x)' + (-3)' \\ &= 2(x^3)' + 4(x)' + (-3)' \\ &= 2\times 3x^2 + 4\times 1 + 0 \\ &= 6x^2+4\end{aligned}$$

初等関数の導関数

積・商の微分法

定理 4.9 (積・商の微分法)

$f(x)$, $g(x)$ ：微分可能

$\Rightarrow$ $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も微分可能で (分母 $\neq 0$ である点で)

(i) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (積の微分法)

(ii) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (商の微分法)

初等関数の導関数

積・商の微分法

[(i) の確かめ]

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&\qquad = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&\qquad = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}
\end{aligned}
$$

ここで $\frac{(f(x+h)-f(x))}{h} \to f'(x)$, $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to g'(x)$, $g(x+h) \to g(x)$ だから

$$
\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
$$

初等関数の導関数

[問題]:

$f(x) = (x^2 + 3x + 2)^5$ のとき,

$$f'(x) = (2x+3)^5 \quad ?$$
$$f'(x) = 5(x^2 + 3x + 2)^4 \quad ?$$
$$f'(x) = 5(2x+3)^4 \quad ?$$

どれも誤り!

初等関数の導関数

合成関数

合成関数の定義

関数 $t = g(x)$, $y = f(t)$ に対して

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad x \in X$$

で決まる関数 $g \circ f$ を f, g の合成関数という.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & T & \xrightarrow{f} & Y \\ x & & t & & y \\ & t = g(x) & & y = f(t) & \end{array}$$

[例]

$y = f(t)$, $t = g(x)$ の合成関数は $y = f(g(x))$.

$y = t^5$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = (x^2 + 3x + 2)^5$.

$y = \sqrt{t}$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

$y = \sin t$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sin(x^2 + 3x + 2)$.

初等関数の導関数

合成関数の微分法

定理 4.7.　合成関数の微分法

$y = f(t),\ t = g(x)$ ：微分可能 $\Rightarrow$ $y = f(g(x))$ ： 微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}, \qquad \left(\text{または}\,(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)\right)$$

[確かめ]　導関数の定義より

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \qquad \left(= \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)) - f(t)}{\Delta t} \qquad \left(= \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

$$\frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \qquad \left(= \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$$

である。

初等関数の導関数

合成関数の微分法

ただし $g(x+\varDelta x)-g(x)=\varDelta t,\quad f(t+\varDelta t))-f(t)=\varDelta y$ とおいた。

$$x \quad \stackrel{g}{\longmapsto} \quad t \quad \stackrel{f}{\longmapsto} \quad y$$

増分:$\varDelta x$ 　増分:$\varDelta t$ 　増分:$\varDelta y$

ここで

$$\frac{\varDelta y}{\Delta x}=\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\times\frac{\varDelta t}{\Delta x}$$

であるが, $\varDelta x\to 0$ とすると $\varDelta t\to 0$ でもあるから

$$\text{左辺}\to\frac{dy}{dx},\qquad \text{右辺}\to\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}$$

初等関数の導関数

合成関数の微分法

[例題] (1) $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^5$ の導関数を求める。

$y = f(x)$, $t = x^2 + 3x + 2$ とおく.

関数 $y = (x^2 + 3x + 2)^5$ は関数 $y = t^5$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 2) = 2x + 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^5) = 5\,t^4$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 5\,t^4 \times (2x + 3) = 5(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)^4$$

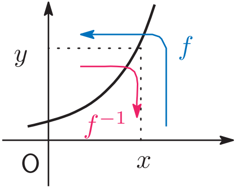
である.

初等関数の導関数

逆関数の微分法

逆関数

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ x & \longmapsto & y \\ & y = f(x) & \end{array}$$



X : f の定義域
$Y = f(X)$: f の値域 のとき

関数 f が 1 対 1 であるとは

「$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$」であること。

このとき

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

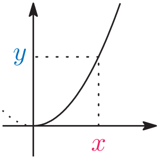
で決まる関数

$$f^{-1} : Y \to X$$

を f の逆関数という.

初等関数の導関数

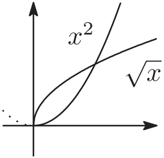
逆関数の微分法



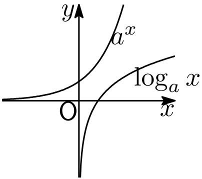
[例]

$y = x^2$, $(x \geqq 0)$ の逆関数は $x = \sqrt{y}$

変数 x, y をとりかえて $y = \sqrt{x}$ と表す必要は必ずしもない。



変数を取り換えて $y = \sqrt{x}$ とすると，二つの関数のグラフは $y = x$ に関して対称になる。



$a > 0$, $a \neq 1$ とする。

$y = a^x$ の逆関数は $x = \log_a y$, $(y > 0)$

変数を取り換えて $y = \log_a x$ とすると，二つの関数のグラフは $y = x$ に関して対称になる。

初等関数の導関数

逆関数の微分法

逆関数の微分法

(i) 関数 $y = f(x)$ が区間 I で連続かつ狭義単調であるとすると逆関数が存在して連続である.

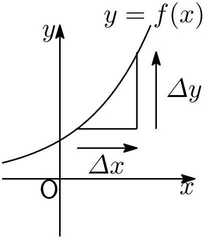
(ii) さらに $f(x)$ が I で微分可能で $f'(x) \neq 0$ ならば, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ も $f(I)$ で微分可能で次が成り立つ：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

初等関数の導関数

逆関数の微分法

[確かめ]　(i) は省略。(ii) は



$\Delta x (\neq 0)$: x の増分

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$: y の増分.

とすると

$$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$$

で f^{-1} は連続だから $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

だからここで $\Delta x, \Delta y \to 0$ とすると $\quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

ネイピアの数 e

次の極限が存在する:

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

この極限の値 e はネイピアの数とよばれ, 無理数である。円周率 π と並んで最重要の定数である。

$$e = 2.718281828459\cdots$$

である。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

以下 (i), (ii) を確かめる。

(Step 1) $0 < a \leqq b$ ならば $\dfrac{a}{b} \leqq \dfrac{a+1}{b+1}$。

(Step 2) 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は単調増加。なぜなら 2 項定理により

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!\,n^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n} \times\cdots\times \frac{n-k+1}{n}\,\frac{1}{k!}$$

$$\leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n+1} \times \frac{n+1-1}{n+1} \times\cdots\times \frac{n+1-k+1}{n+1} \times \frac{1}{k!}$$

$$\leqq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n+1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \times\cdots\times \frac{n-k+2}{n+1} \times \frac{1}{k!} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

(Step 3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqq 3$. なぜなら $k=1,\ldots,n$ のとき $k! \geqq 2^{k-1}$ であるから

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\,\frac{1}{k!}\\ &\leqq 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1+\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}\\ &< 1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=3\end{aligned}$$

(Step 4) 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は有界かつ単調増加だから収束する。(教科書 47 ページまたはスライド第 1 回) これで (i) がわかった。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

(Step 5) $x \to +0$ の場合に (ii) を示す. $n \leqq \dfrac{1}{x} < n+1$ となる自然数 n をとる.

$t \mapsto (1+x)^t$ は t について単調増加であり $\dfrac{1}{n+1} < x \leqq \dfrac{1}{n}$ だから

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+x)^n \leqq (1+x)^{\frac{1}{x}} < (1+x)^{n+1} \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

である. ここで $x \to +0$ とすると $n \to \infty$ となるので

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to e \times 1 = e,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e \times 1 = e$$

となる. したがって, はさみうちの原理により $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ も e に収束することがわかった. $x \to -0$ の場合は教科書 56 ページを見てください.

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

自然対数・常用対数

$\log_e x$ は 自然対数と呼ばれ, 記号

$$\log x \text{ あるいは } \ln x$$

で表す.

これに対して 10 を底とする対数を常用対数と呼ぶ.

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

定理 4.11　対数関数の導関数

(i) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x > 0)$

(ii) $(\log |x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x \neq 0)$

[(i) の確かめ]　左辺 $= \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$ であり

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x} \frac{x}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \log\left\{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\} \to \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

[(ii) の確かめ]　$x > 0$ のとき：$|x| = x$ であるから (i) と同じ。
$x < 0$ のとき：$t = -x$ とおくと $|x| = t > 0$ であるから合成関数の微分法により

$$(\log|x|)' = \frac{d\ \log t}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \times (-1) = \frac{1}{x}.$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

定理 4.12　指数関数の導関数

$$(e^x)' = e^x$$

[確かめ]
$y = e^x$ とおく．$x = \log y$ であるから逆関数の微分法により

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\log y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = e^x,$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

[例]

(i) $(e^{ax})' = ae^{ax}$ $(a$; 定数)

(ii) $(a^x)' = a^x \log a$ $(a$: 1 でない正の定数)

[(i) の確かめ] $ax = t$ とおき合成関数の微分法を使うと

左辺 $= \dfrac{d}{dx}e^{ax} = \dfrac{d}{dt}e^t \times \dfrac{dt}{dx}$

定理 4.12 より $\frac{d}{dt}e^t = e^t$ だから

$= e^t \times a = a\,e^{ax} =$ 右辺.

[(ii) の確かめ] $a = e^{\log a}$ だから $a^x = e^{x \log a}$. これと (i) により

左辺 $= e^{x \log a} \log a =$ 右辺

$(a^x)' = a^x$ となるのは $a = e$ のときだけである。

初等関数の導関数

対数微分法

定理 4.13　対数微分

関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

[確かめ]　$t = f(x)$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \left(\frac{d}{dt}\log|t|\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

初等関数の導関数

対数微分法

[例] $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α：実数の定数) の証明。

$y = x^{\alpha}$ とおき両辺の対数をとると,

$$\log y = \log x^{\alpha} = \alpha \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

したがって

$$y' = \frac{\alpha}{x} \times y = \frac{\alpha}{x} \times x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$$