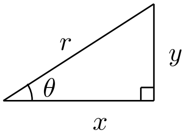
本日やること

1. 三角関数
    - 三角比
    - 弧度法
    - 回転の角
    - 定義
    - グラフの作図
2. 微分係数・導関数
    - はやさと速度
    - 微分係数・導関数の定義
    - 微分係数とグラフの接線

三角関数

三角比

三角比の定義 (鋭角の場合)



角 θ が鋭角の場合, 図のような直角三角形を用いて

θ の正弦を $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

θ の余弦を $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

θ の正接を $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

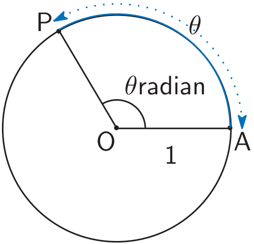
と定める。

三角形を相似に拡大 (縮小) してもこの値は変わらず, θ のみによって決まる。

三角関数

弧度法

弧度法の定義



図のような半径 1 の円において

$\angle$AOP $= \theta$ radian (ラジアン)

であるとは

円弧 AP の長さ $= \theta$

であること

このような角の大きさのはかり方を弧度法という。普通、θ (rad) と書くが (rad) を省略することもある。

度数法と比較すると,

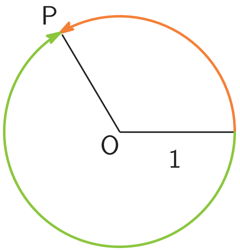
1 回転 $= 360°$, 半径 1 の円の円周の長さ $= 2\pi$ だから

$$2\pi \text{ (rad)} = 360°, \quad \pi \text{ (rad)} = 180°, \quad \frac{\pi}{2} \text{ (rad)} = 90°, \cdots$$

三角関数

回転の角

回転の角の定義



P が原点中心半径 1 の円周上を回転しているとき

P の回転の角が θ (rad) であるとは

正の向きの回転のとき $\theta =$(P の軌跡の長さ)
負の向きの回転のとき $\theta = -$(P の軌跡の長さ)

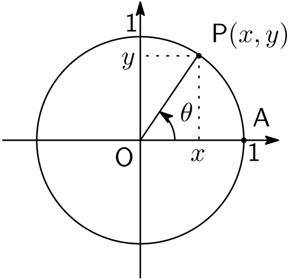
であること．ただし

正の向きの回転：左回り (反時計回り) の回転
負の向きの回転：右回り (時計回り) の回転

三角関数

定義

三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1,0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし，P の座標を (x,y) とするとき

$\cos\theta = x$: 余弦

$\sin\theta = y$: 正弦

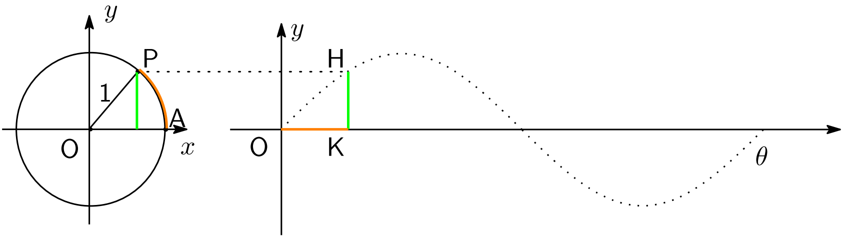
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$: 正接

と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

また，これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という.

三角関数
グラフの作図

$y = \sin\theta$ のグラフを書いてみよう。



1. x, y 平面に原点中心の半径 1 の円を書き, 円周上に点 A$(1, 0)$, P(x, y) をとる。
∠AOP$=$ θ とすると三角関数の定義により, (弧 AP の長さ)$=$ θ, $y = \sin\theta$ となる。

2. 三角関数 $y = \sin\theta$ は θ に対して y を対応させる関数であるから, そのグラフは, θy 平面に点 H(θ, y) をとるとき, P を円周上で動かしたとき H がえがく曲線である。

3. 上の図を用いて $y = \sin\theta$ のグラフを書くには, K$(\theta, 0)$ とするとき, (弧 AP の長さ)$=$OK $(= \theta)$ となるように点 P をとらなければならない。

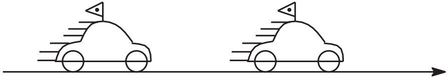
微分係数・導関数

はやさと速度

はやさと速度

$$\text{はやさ} = \frac{\text{みちのり}}{\text{かかったじかん}}$$ を精密化する

時刻 t $t+h$



座標 $f(t)$ $f(t+h)$

(時刻 t から $t+h$ までの) 平均の速度 $= \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$

負の値も取りうることに注意

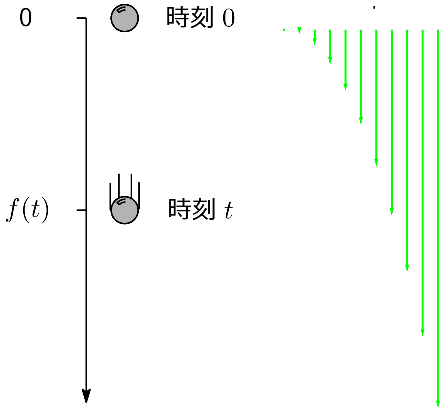
(時刻 t の) 瞬間の速度を $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ で定める。

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であることに注意

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



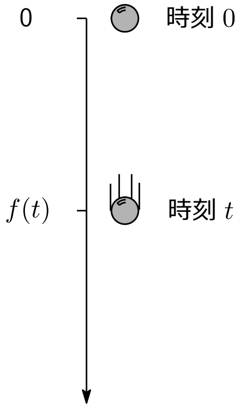
$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

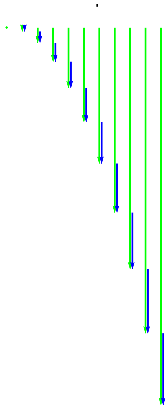
$(g$: 重力加速度)

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]





$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

(g：重力加速度)

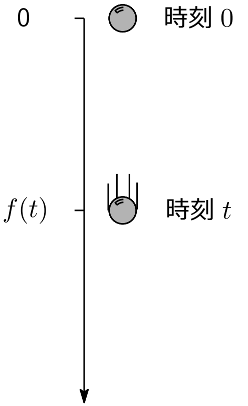
平均の速度

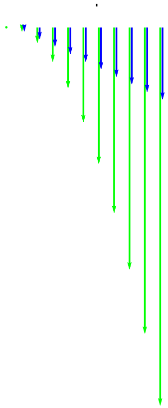
$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]





$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

$(g$：重力加速度$)$

平均の速度

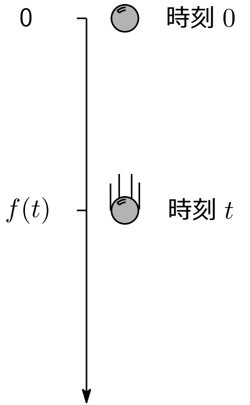
$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

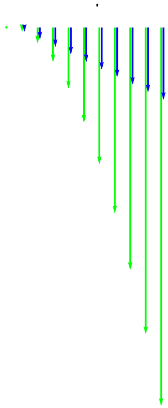
$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]





$f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (m)

(g : 重力加速度)

平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

ここで $h \to 0$ として極限をとると

瞬間の速度 $v = gt$ (m/s)

がえられる。

微分係数・導関数

運動の法則

Newton の運動の法則 その 3 運動方程式

物体に力 $F(t)$ が働くときその物体には

$$F(t) = ma(t)$$

で決まる加速度 $a(t)$ が生じる.

今の場合 $a(t) = g$ (一定) だから一定の力 $F = mg$ で引っ張られていることになる。これが重力。

平均の速度は t に比例するとは言えないからこの法則は見えてこない。瞬間の速度を考えることが必要である。

微分係数・導関数

微分係数の定義

微分係数の定義

$f(x)$ が $x = a$ で (または点 a で) 微分可能であるとは

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\star)$$ が存在すること

$(\star)$ を $f(x)$ の $x = a$ におけるまたは点 a における微分係数といい,

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \cdots$$ で表す．つまり

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

微分係数・導関数

導関数の定義

導関数の定義

$f(x)$ が 区間 I で微分可能であるとは, 区間 I の各点で微分可能であること

このとき 関数 $x \mapsto f'(x)$ を, 関数 $f(x)$ の導関数といい, 記号

$$f', \quad f'(x), \quad (f(x))', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}$$

などで表す. つまり

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

微分係数・導関数

微分可能性と連続性

関数 $f(x)$ が点 a で微分可能 $\Rightarrow$ 点 a で連続

逆は成り立たない。

[確かめ]

$x \to a$ とするとき

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) \to f'(a) \times 0$$

だから $f(x) \to f(a)$

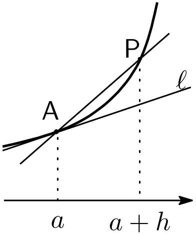
微分係数・導関数

微分係数とグラフの接線

微分係数とグラフの接線

$f(x)$ が点 a で微分可能 $\Rightarrow$ グラフは点 A$(a, f(a))$ で接線を持つ.
ただし接線とは A をとおり傾き $f'(a)$ の直線の事とする. 方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



[確かめ]　P$(a+h, f(a+h))$ とおく

AP の傾き $= \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\star)$

ℓ の傾き $= f'(a) \cdots (\star\star)$

$h \to 0$ とすると $(\star) \to (\star\star)$ だから AP$\to \ell$ と考えられる。したがって ℓ は接線。

微分係数・導関数

微分係数とグラフの接線

[例 4.2] 曲線 $y = x^2$ の点 $(1, 1)$ における接線を求める。
$f(x) = x^2$ とおく。$x = 1$ における微分係数は

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であるが $h \neq 0$ としてよいから h で約分ができて

$$= \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

接線は $(1, 1)$ を通って傾き $f'(1) = 2$ の直線であるから方程式は

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

整理して

$$y = 2x - 1$$