

# 本日もやること

## 1 指数関数

- 微生物の増殖
- 定倍率変化の法則
- 有理数べき
- 指数法則
- 実数べき
- 指数関数の定義
- グラフ
- 性質

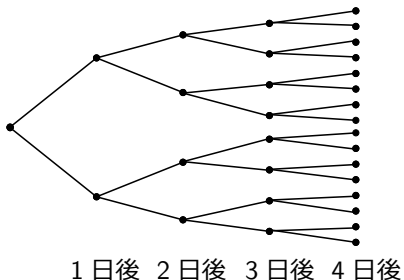
## 2 対数関数

- 対数の定義
- 対数の性質
- 対数関数の定義

# 指数関数

## 微生物の増殖

分裂して増殖することにより個体数が1日で2倍になる微生物がある。



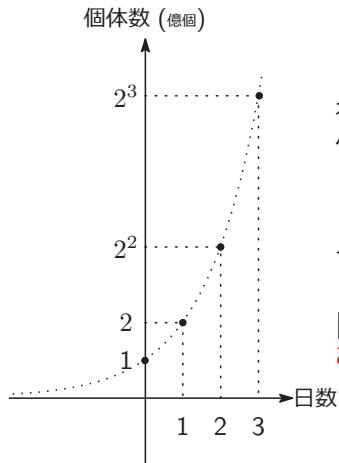
日数を  $n$  倍とする

⇒  $n$  日後  $2^n$  倍となる。

等比数列的変化である。

# 指数関数

## 微生物の増殖



初めの個体数を 1 (億個) とすると  $n$  日後の個体数は

$$2^n \text{ (億個)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

である。

[本日の目標] 増殖は連続的変化であるはずである。 $t$  日後 ( $t$  は実数) の個体数を決めたい。

# 指数関数

## 定倍率変化の法則

「1 日で  $a$  倍に増殖する」 ( $a$  は正の定数)

を一步進めて

「(どの時点から始めても) 一定の時間がたつと全個体中の一定割合の個体が分裂する」

「その結果 1 日後に  $a$  倍になる。 ( $a$  は正の定数)」

と考える。

$t$  日後の個体数を  $a^t$  と書くことにする。ただし  $t$  は実数である。これを**実数冪 (べき)** とよぶ。

# 指数関数

## 定倍率変化の法則

だから次のことが成り立つとしてよいだろう。

定倍率変化の法則

$t$  が一定量  $h$  だけ増加すると,  $a^t$  は  $t$  によらず一定の倍率  $u(h)$  で変化する。  
すなわち

$$\frac{a^{t+h}}{a^t} = u(h) \quad (u(h) \text{ は } t \text{ によらない}) \quad \dots\dots\dots \spadesuit$$

これを**定倍率変化の法則**という。

# 指数関数

## 指数法則

定倍率変化の法則 (♠) は

指数法則

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad t, s \text{ は有理数}$$

..... ◊

と同値である。なぜなら

$$\begin{aligned} \spadesuit &\Leftrightarrow \frac{a^{t+s}}{a^s} = u(t) \quad (s \text{ によらない}) \\ &\Leftrightarrow a^{t+s} = a^s u(t) \end{aligned}$$

ここで  $s = 0$  を代入すると  $a^0 = 1$ ,  $a^t = u(t)$  だから

$$\Leftrightarrow a^{t+s} = a^s a^t$$

# 指数関数

## 指数法則

指数法則と有理数べき

指数法則  $a^{t+s} = a^t a^s$ ,  $t, s$  は有理数 ..... ④

をみとめると有理数べきは

$a^0 = 1$  ..... ①

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ..... ②

$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$  ..... ③

$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$  ..... ④

のように定められる。

# 指数関数

## 指数法則

指数法則と有理数べき

逆に  $A, B, C, D$  のように定めると指数法則が成り立つことが確かめられる。  
教科書 P.20 例 2.2 をみよ。



# 指数関数

## 指数法則

指数法則に追加

$a > 0, b > 0, t, s$  は有理数のとき

$$(i) a^r a^s = a^{r+s},$$

$$(ii) \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s},$$

$$(iii) (a^r)^s = a^{rs},$$

$$(iv) (ab)^r = a^r b^r$$

$$(v) \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

# 指数関数

## 累乗根を含む式の計算

累乗根は有理数べきに直して指数法則を使って計算するのがよい。

[例]

$$\begin{aligned}\sqrt{a^3 \times \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a}} &= \left( a^3 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( a^{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= a^{(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) \times \frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{15}{8}}\end{aligned}$$

# 指数関数

## 実数べき

### 実数べきの定義

実数  $t$  に対してこれに近づいていく有理数の列  $r_1, r_2, r_3, \dots$  がある。このとき、 $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots$  が定義されるが、これらもある値に近づいていくことが知られている。この値を

$$a^t$$

と定める。これを実数べきという。

実数冪も指数法則を満たす

# 指数関数

## 定義

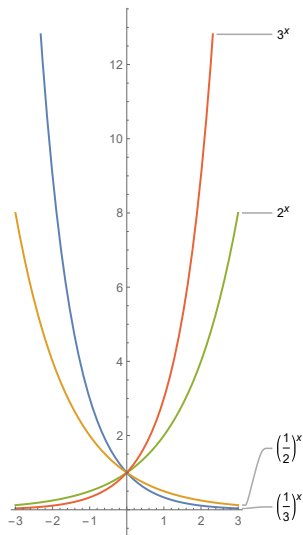
### 指数関数の定義

$a > 0, a \neq 1$  とする. 実数べきから作られる関数  $f(x) = a^x$  を,  $a$  を底とする  $x$  の指数関数とよぶ.

定義域は実数全体である.

## 指数関数

## グラフ



$2, 2^2, 2^3, \dots$  は激しく増加する。

実数べき  $2^x$  は等比数列  $2^n$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) を拡張したものであるから,  $x$  が増加すると同様に激しく増加する。

$\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, \dots$  は非常にはやく 0 に近づく。

実数べき  $(\frac{1}{2})^x$  は等比数列  $(\frac{1}{2})^n$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) を拡張したものであるから,  $x$  が増加すると同様に非常にはやく 0 に近づく。

# 指数関数

## 性質

定理 2.1. 指数関数の性質

(I) 指数関数  $f(x) = a^x$  の定義域は実数全体  $\mathbb{R}$ , 値域は正の実数全体  $(0, \infty)$  である. また,

(i)  $1 < a$  のとき狭義単調増加,

(ii)  $0 < a < 1$  のとき狭義単調減少.

(II) すべての実数  $t, s \in \mathbb{R}$  に対して次の指数法則が成り立つ.

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad a^{t-s} = \frac{a^t}{a^s}, \quad a^{ts} = (a^t)^s$$

ただし, 関数  $f(x)$  が

狭義単調増加であるとは  $t < s \Rightarrow f(t) < f(s)$  であること.

狭義単調減少であるとは  $t < s \Rightarrow f(t) > f(s)$  であること.

# 対数関数

## 対数の定義

### 対数の定義

$a$  を  $a > 0, a \neq 1$  を満たす定数とする. このとき, 正の数  $M$  に対して

$$a^p = M$$

となる実数  $p$  がただ 1 つ存在する. この  $p$  を

$$p = \log_a M, \quad M > 0$$

と表し,  $a$  を底とする  $M$  の対数という. また,  $M$  を真数と呼ぶ. つまり

$$p = \log_a M \iff a^p = M \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である.  $\log_a M$  はログ底  $a$  の  $M$  と読む.

# 対数関数

## 対数の定義

特に

$$a^{\log_a M} = M$$

$$\log_a a^p = p$$

$$\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$$

注意すること

底の条件：  $a > 0, a \neq 1$

真数条件：  $M > 0$



# 対数関数

例

[例]

$\log_2 \sqrt{32}$  を求める.

$\log_2 \sqrt{32} = p$  とおくと 定義より

$$\Leftrightarrow 2^p = \sqrt{32}$$

ところで  $\sqrt{32} = (2^5)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$  だから指数を比較して

$$p = \frac{5}{2}$$

# 対数関数

## 対数の性質

### 対数の性質

$a, b : 1$  でない正の数,  $M > 0, N > 0, k, x, p$  を実数とするとき

$$(i) \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$(ii) \log_a \left( \frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$$

$$(iii) \log_a (M^k) = k \log_a M$$

$$(iv) \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \quad (\text{底の変換公式})$$

すべて指数法則を対数の言葉で言い換えたものである。

# 対数関数

## 対数の性質

[(i) の確かめ]

$$\begin{array}{lll}
 \log_a M = t \text{ とおく} & \begin{array}{l} \text{定義より} \\ \Leftrightarrow \end{array} & a^t = M \\
 \log_a N = s \text{ とおく} & \begin{array}{l} \text{定義より} \\ \Leftrightarrow \end{array} & a^s = N \\
 & \text{かけ合わせて} & a^t a^s = MN \\
 & \text{指数法則より} & \parallel \\
 \log_a MN = t + s & \begin{array}{l} \text{定義より} \\ \Leftrightarrow \end{array} & a^{t+s} \\
 & \parallel & \\
 & \log_a M + \log_a N &
 \end{array}$$

# 対数関数

## 対数の性質

[(iv) の確かめ]

$$\begin{array}{ccc} \log_a b = t & \log_b c = s & \text{とおく} \\ \text{定義より} & \Downarrow & \Downarrow \\ & a^t = b & b^s = c \end{array}$$

指数法則より

$$\begin{array}{ccc} a^{ts} = & (a^t)^s = b^s = c & \\ \text{定義より} & \Downarrow & \\ \text{(iv)} \iff & \log_a c = ts = \log_a b \log_b c & \end{array}$$

# 対数関数

例

[例]

$X = \log_a x$ ,  $Y = \log_a y$ ,  $Z = \log_a z$  とおくと

$$\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z = X + Y + Z$$

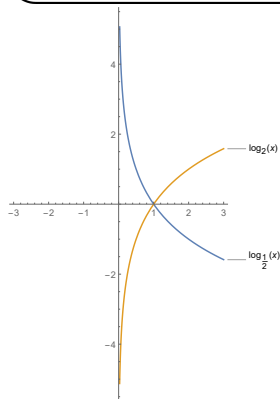
$$\begin{aligned}\log_a \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{z^3}} &= \log_a(x^{\frac{1}{2}}y z^{-\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}\log_a x + \log_a y - \frac{3}{2}\log_a z \\ &= \frac{1}{2}X + Y - \frac{3}{2}Z\end{aligned}$$

# 指数関数

## 定義

### 対数関数の定義

$a > 0, a \neq 1$  とする. 関数  $f(x) = \log_a x$  を,  $a$  を底とする  $x$  の対数関数とよぶ.



定義域は 正の実数全体  $(0, \infty)$ , 値域は 実数全体  $\mathbb{R}$  である. また,

- (i)  $1 < a$  のとき狭義単調増加,
- (ii)  $0 < a < 1$  のとき狭義単調減少.

指数関数の逆関数である。