

本日より

1 関数と極限

- 関数の定義
- 関数のグラフ
- 関数の極限の定義
- 関数の極限の性質

2 連続関数

- 連続関数の定義
- 連続関数の性質

関数

関数の定義

関数の最も一般的な定義

実数の集合 D で定義された (1 変数) 関数とは, D の各要素 x に実数 $y \in \mathbb{R}$ をただ 1 つ対応させる規則のこと。

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad f : x \mapsto y$$

で表す. このときの y を x の f による値または像と呼び $f(x)$ で表す. だから

$$f : x \mapsto y \quad \text{は} \quad y = f(x) \quad \text{と同じ}$$

D : f の定義域という。

$\{f(x); x \in D\}$: f の値域という。 (= $f(D)$ と書くこともある。)

文字 x, y は変化しうる数を表しているので 変数であるが x を独立変数, y を従属変数と呼ぶ。

関数

関数の定義

[関数 f の対応の規則の表し方]

$$f : 0 \mapsto 0, \quad \sqrt{2} \mapsto 2\sqrt{2}, \quad 2 \mapsto 8, \quad 2.5 \mapsto 15.625, \dots$$

の様な関数の対応の規則はまとめると $\square \mapsto \square^3$ であるが、変数 x を使うと

$$f(x) = x^3$$

のようにまとめて表現することができる。

$$f(t) = t^3, \quad f(s) = s^3, \quad y = x^3, \quad x^3, \dots$$

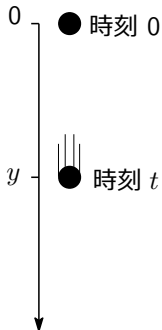
などと書くこともある。全部同じこと。

関数

何のために使うか

関数を使うと、**ものごとの変化や運動を表現**することができる。

例：自由落体



表で表すと

時刻 t (sec)	0	0.5	1	1.5	2	2.5
位置 y (m)	0	1.225	4.9	11.025	19.6	30.625

関数を使うと、「 t に対し

$$y = 4.9t^2$$

で決まる y が対応している。」

表ではとびとびにしか分からないが、関数を使うとすべての t に対する y が分かる。

関数

例

(i) $f(x) = 3$: 定数関数。定義域は実数全体。

(ii) $f(x) = 2x + 3$: 1次関数。

(iii) $f(x) = x^2 - x + 2$: 2次関数。

(iv) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$: 無理関数。 $x < 0$ では定義できない。

(v) $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$: 有理関数。 $x = 0$ では定義できない。

(vi) $f(x) = e^x$: 指数関数。

(vii) $f(x) = \sin x$: 三角関数。

(viii) 以上の組み合わせ。 $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 。

などなど。

関数

合成関数

合成関数の定義

関数 $t = g(x)$, $y = f(t)$ に対して

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad x \in X$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & T & \xrightarrow{f} & Y \\ x & & t & & y \end{array}$$

で決まる関数 $g \circ f$ を f, g の合成関数という。

$$t = g(x) \qquad y = f(t)$$

[例]

$y = f(t)$, $t = g(x)$ の合成関数は $y = f(g(x))$.

$y = t^5$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = (x^2 + 3x + 2)^5$.

$y = \sqrt{t}$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

$y = \sin t$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sin(x^2 + 3x + 2)$.

関数

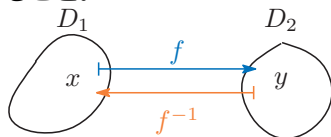
逆関数

逆関数の定義

関数 $f : D_1 \rightarrow D_2 (= f(D_1))$ が **1対1** であるとは

$$x_1, x_2 \in D_1, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

であること。



このとき、関数 $f^{-1} : D_2 \rightarrow D_1$ を

$$y \in D_2, x = f^{-1}(y) \iff x \in D_1, y = f(x)$$

で定め f の**逆関数**という。

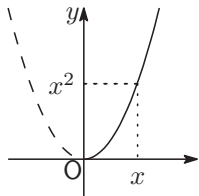
関数

逆関数

[例]

$$x = \sqrt{y}, y \geq 0 \iff y = x^2, x \geq 0$$

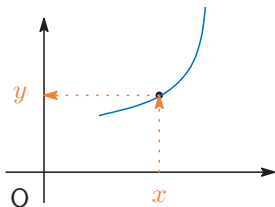
だから $x = \sqrt{y}$ は $y = x^2$, (ただし定義域は $x \geq 0$ とする) の逆関数である。



関数

関数のグラフ

関数のグラフ



関数 f のグラフとは,

座標平面上の $y = f(x)$, $x \in D$ を満たす
点 (x, y) の集合

のこと。ただし, D は f の定義域。つまり

点 $P(x, y)$ がグラフに含まれる $\iff y = f(x)$, $x \in D$

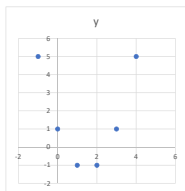
である。

関数

グラフの書き方

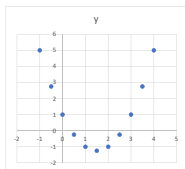
$f(x)$ の値がとびとびでも分かればグラフの概形は書ける!!

[例] $y = x^2 - 3x + 4$



x を間隔 1 で取ると

x	-1	0	1	2	3	4
y	5	1	-1	-1	1	5



x を間隔 0.5 で取ると

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	5	2.75	1	-0.25	-1	-1.25	-1	-0.25	1	2.75

関数の極限

関数の極限の定義

関数の極限の定義

「 x を $x \neq a$ の状態で定数 a に限りなく近づける」ことを記号 $x \rightarrow a$ で表す。

$f(x)$: 関数, α : 定数 のとき

「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は極限 (値) α に収束する」とは

\Leftrightarrow 「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は限りなく α に近づく」こと

記号 : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $f(x) \rightarrow \alpha$, $(x \rightarrow a)$ で表す。

「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は発散する」とは \Leftrightarrow 「どんな α にも収束しない」こと

「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は正の (または負の) 無限大に発散する」とは

\Leftrightarrow 「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が限りなく大きくなる」こと (または符号が負で $|f(x)|$ が限りなく大きくなること)

記号 : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, $f(x) \rightarrow \pm\infty$, $(x \rightarrow a)$ で表す。

関数の極限

関数の極限の定義

関数の極限の定義

「 x を $x > a$ ($x < a$) の状態で定数 a に限りなく近づける」ことを $x \rightarrow a \pm 0$ で表す。

とくに $a = 0$ のときは $x \rightarrow \pm 0$ と書く。(複号同順)

「 x を限りなく大きくする」ことを. $x \rightarrow \infty$ で表す。

「 x を符号が負で絶対値を限りなく大きくする」ことを. $x \rightarrow -\infty$ で表す。

このとき

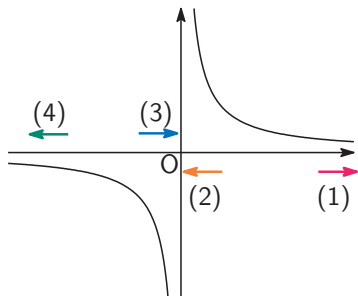
$$\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$$

も同様に定める。片側極限という。

関数の極限

関数の極限の例

[例 3.6]



$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = +0,$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = -0$$

関数の極限

関数の極限の性質

定理 3.9 関数の極限の性質

$x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow \alpha$, $g(x) \rightarrow \beta$ とする. このとき,

- (i) $kf(x) \rightarrow k\alpha$ (k は定数)
- (ii) $(f(x) \pm g(x)) \rightarrow \alpha \pm \beta$
- (iii) $(f(x)g(x)) \rightarrow \alpha\beta$
- (iv) $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ (ただし, $\beta \neq 0$)
- (v) さらに $f(x) \leq g(x)$, (x は a に近い全ての実数) ならば $\alpha \leq \beta$.
- (vi) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, (x は a に近い全ての実数), $\alpha = \beta$
 $\Rightarrow h(x) \rightarrow \alpha = \beta$. (はさみうちの原理)

関数の極限

関数の極限の性質

[例]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$$

関数の極限

関数の極限の性質

[注意 1.] 定理は $x \rightarrow a \pm 0$, $x \rightarrow \pm\infty$ のときも正しい。

[注意 2.]

$$\frac{\text{正の数}}{\pm\infty} = \pm 0, \quad \frac{\text{負の数}}{\pm\infty} = \mp 0, \quad \frac{\text{正の数}}{\pm 0} = \pm\infty, \quad \frac{\text{負の数}}{\pm 0} = \mp\infty$$
$$\text{正の数} \times (\pm\infty) = \pm\infty, \quad \text{負の数} \times (\pm\infty) = \mp\infty$$

などと考えると $\alpha, \beta = 0, \infty$ のときも正しい場合がある。

[注意 3.] ただし形式的に

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, \dots$$

の形になる極限 (**不定型の極限**) の場合には使えないので要注意。

関数の極限

関数の極限の性質

[例] $\frac{0}{0}$ 型不定形

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

は不可。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

$x \rightarrow 1$ は x を $x \neq 1$ の状態で 1 に近づけること意味するから $(x - 1) \neq 0$ で約分できるので

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

連続関数

連続関数の定義

連続関数の定義

$f(x)$: 区間 I で定義された関数, $a \in I$ のとき

$$(i) f(x) \text{ が } x = a \text{ で (または点 } a \text{ で) 連続} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(a が区間の端点であるときは片側極限值を考える.)

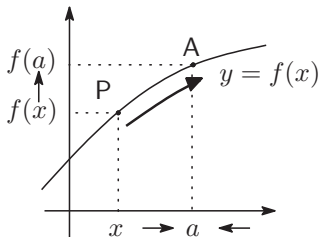
$$(ii) f(x) \text{ が 区間 } I \text{ で連続} \Leftrightarrow f(x) \text{ が 区間 } I \text{ の各点で連続}$$

[連続でない関数の例] 教科書 58 ページを見よ。

連続関数

連続関数の性質

[連続関数のグラフ]



$A(a, f(a)), P(x, f(x))$ とする。

$f(x)$ が点 a で連続ならば

$$x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow f(a) \Rightarrow P \rightarrow A$$

だから**グラフは点 A でつながっている。**

$f(x), g(x)$ が (点でまたは区間で) 連続 \Rightarrow

$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (分母 } \neq 0 \text{ となる点で) も連続}$$

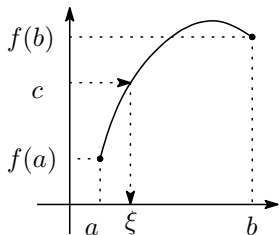
だから**多項式関数, 有理関数** は定義域で連続。

指数関数, 三角関数 も作り方から連続であることがわかる。

連続関数

連続関数の性質

中間値の定理



関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であり、さらに $f(a) < f(b)$ であるならば、 $f(a) < c < f(b)$ であるようなどんな実数 c に対しても

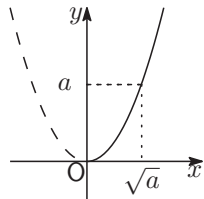
$$f(\xi) = c$$

を満たすような実数 ξ が区間 $[a, b]$ に少なくとも1つ存在する。 $f(a) > f(b)$ であるときも同様である。

連続関数

連続関数の性質

[例] 平方根の存在

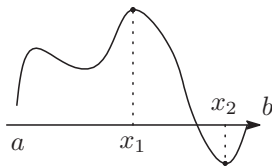


連続関数

連続関数の性質

最大値最小値の定理

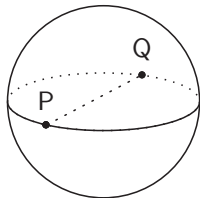
関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で連続であるならば $f(x)$ が最大値をとる点および最小値をとる点がこの区間に存在する。



連続関数

連続関数の性質

[例題]



地球表面の気温分布は連続であるとする。赤道上の点 P とその裏側の点 Q で、気温が一致するものがあることを説明せよ。