ガイダンス

環境基礎解析学 I / 環境基礎解析学 I 演習

目的： 1 変数の微積分法の基礎と応用を学ぶ。高校数 III より高度な内容となる。

(i) 高校数 IIB・数 III を習っていない人はここで勉強してもらいます。

(ii) 習っていても知識が不確実であったり考え方が誤っている人（結構多い）はやり直してもらいます。

開講日：環境基礎解析学 I　金 5・6 時限
　　　　環境基礎解析学 I 演習　火 7・8 時限

ガイダンス

授業の受け方：

授業スライドを作る。事前に小山のホームページ

http://www.eds.it-hiroshima.ac.jp/koyama/

にアップロードするので印刷しておくことが望ましい。教科書・PC を持ってくること。必ずノートを作ること。

演習問題を出すので必ず解いて提出すること。

授業内容の説明は原則金曜日にするが、火曜日になることもあるので、両方出ること。

中間試験を行う。事前に予告する。

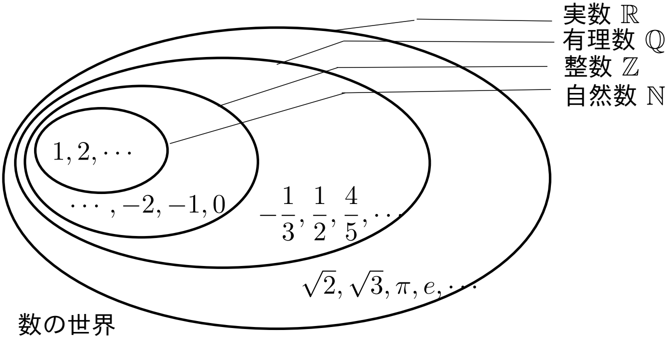
本日やること

1. ガイダンス
2. 数
    - 実数と無限小数
    - 数直線と座標
    - 有理数と無理数
    - 平方根
    - 平方根の積と商
    - 分母の有理化
3. 文字と式
    - 変数
    - 未知数と方程式
    - 計算規則
    - 例題
4. 不等式
    - $<$ の性質
    - 区間
    - 1 次不等式

数

いろいろな数

いろいろな数を習いました。



数

いろいろな数

(有理数まで) 数の世界を広げてきた理由

$\Rightarrow$ 演算が自由にできるようにするため。

	たし算	ひき算	かけ算	わり算 ($\div 0$ 以外)
自然数	○	×	○	×
整数	○	○	○	×
有理数	○	○	○	○
実数	○	○	○	○

では「有理数から実数へ」の拡張は何のため？

$\Rightarrow$ すべてのものの長さを表せるようにするため

数

無限小数

実数とは何か、何のためにあるか

正の実数

1. 自然数全体にすべての正の（有限または無限）小数を付け加えた集合を正の実数の集合とする。
2. 正の実数を使うと，いかなるものの長さをも表すことができる。

大まかに言ってこの性質を実数の連続性という。

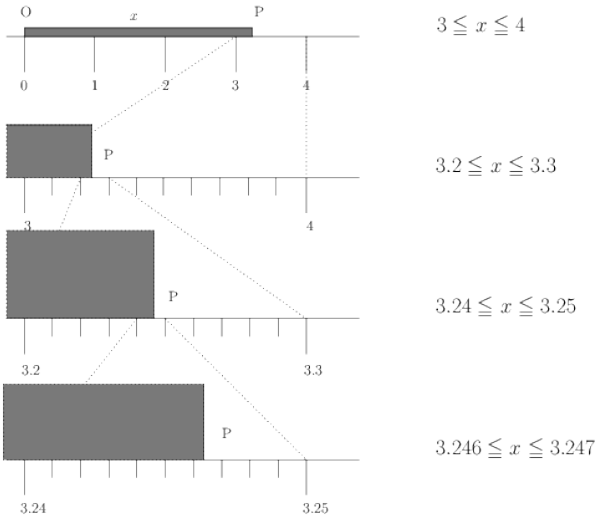
詳しくは

http://www.eds.it-hiroshima.ac.jp/koyama/MPSuppli/index.html

を見てください。

数

無限小数



これを無限に繰り返したとして

$x = 3.247\cdots$

としてよいだろう。

このように考えると

すべてのものの長さは無限小数で表すことができる

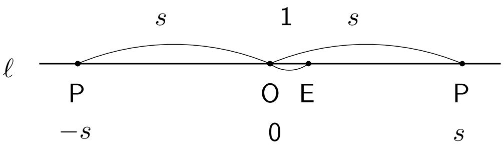
ことになる。

数

数直線

数直線と座標

直線 ℓ 上に原点 O をとる．また，点 E をとり OE$=1$ と決める．ℓ 上の点 P に対し，実数の連続性により線分 OP の長さを表す正の実数 s がある．各点 P に



P が 0 の E と同じ側にあるとき　$x = s$,
P が 0 の E の反対側にあるとき　$x = -s$,
P=O のとき　$x = 0$

で決まる実数 x を対応させた直線 ℓ を数直線といい，x を P の座標という．また，点 P と座標 x を同一視して点 x ともいう．
数直線は無限の長さを持ち、限りなく細かい目盛を持つ万能ものさしである。

数

有理数と無理数

[有理数と無理数]

実は有理数でない実数がある。これを無理数という。

正の実数 $\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{有限小数 (自然数を含む)} \\ \qquad 0.33 = \frac{33}{100} \\ \text{循環する無限小数} \\ \qquad 0.33\cdots = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \text{有理数} \\ \text{循環しない無限小数} \qquad \text{無理数 } \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \cdots, \pi,\ e, \cdots \\ \qquad 0.33030030003\cdots \end{array} \right.$

$\sqrt{2}$ が無理数であること, いいかえると $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ $(m, n = 1, 2, \cdots)$ と表すことが不可能であることは, 高校数 I の教科書を見てください。

数

平方根

平方根 $\sqrt{}$ の定義と性質

(i) 実数 a に対し $x^2 = a$ となる実数 x を a の平方根という。

(ii) $a > 0$ のとき, a の平方根のうち正のものを $\sqrt{a}$ で表す。(このとき $-\sqrt{a}$ も a の平方根となる。) すなわち

$$x = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a, \quad x > 0$$

(iii) $a = 0$ のときは平方根は 0 だけであり $\sqrt{a} = 0$ である.

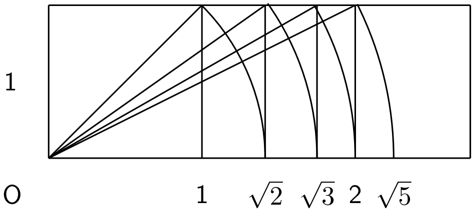
(iv) $a < 0$ のとき, a の平方根は実数の範囲では存在しない。(後に述べるが複素数になる。)

数

平方根

例：$\sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{2} = 1.414\cdots, \quad \sqrt{3} = 1.732\cdots,$

$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{5} = 2.236\cdots$



数
平方根の積と商

平方根の積と商

$a > 0,\ b > 0$ のとき (i) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, (ii) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

[(i) の確かめ]

$$\text{左辺}^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab \quad \text{かつ左辺} > 0$$

だから 左辺 $= \sqrt{ab}$

[例] $\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = \left(\sqrt{3}\right)^2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ は誤り

数
平方根

$\sqrt{(-2)^2} = -2$ は誤り

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を使うと見通しが良くなることがある。

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3}\end{aligned}$$

文字と式

変数・未知数

文字で数を表すことをよくやる。大変役に立つ考え方です。

1. 文字が「何でもよい数」を表す場合，変数という。変数を含む式によっていろいろな量を表すことができる。

例：ある遊園地の入場料は大人 300 円子供 150 円である。
　大人の入場者数を表す変数を n (人),
　子供の入場者数を表す変数を m (人)
とすると入場料の総額は $300n + 150m$ (円) である。

変数にはいろいろな数を代入することができる。代入して得られる数を式の値という。

文字を含む式

未知数・変数

2. 文字が「まだわかっていない数」を表す場合, 未知数という。

例：ある遊園地の入場料は大人 300 円子供 150 円である。K 先生は一家 5 人で遊園地に行き入場料 1200 円を払った。このことは, 家族のうちの大人の人数を n, 子供の人数を m とすると

$$\begin{cases} n + m = 5, \\ 300n + 150m = 1200 \end{cases}$$

のような等式で表すことが出来る。このような等式を方程式といい, これを満たす数を解という。

文字と式

計算規則

文字を含む式を数と同じように計算することができる。そのときの計算規則は数の性質と同じである。数を代入したとき矛盾すると困るからである。

(I) 等号に関する性質

a, b, c を任意の数または式とするとき

(i) $a = a$,

(ii) $a = b \Rightarrow b = a$

(iii) $a = b, b = c \Rightarrow a = c$

(iv) $a = b \Rightarrow$

$$a + c = b + c,\ a - c = b - c,\ ac = bc,\ \frac{a}{c} = \frac{b}{c}\ \ (\text{ただし } c \neq 0)$$

$$f(a) = f(b),$$

(ただし $f(x)$ は x を含む任意の式である。これを代入原理という。)

文字と式

計算規則

(II) 演算に関する性質

a, b, c を任意の数または式とするとき

(i) 加法の交換法則 $a+b=b+a$

(ii) 加法の結合法則 $(a+b)+c=a+(b+c)$

(iii) 乗法の交換法則 $ab=ba$

(iv) 乗法の結合法則 $(ab)c=a(bc)$

(v) 分配法則 $a(b+c)=ac+bc$

が成り立つ。

式の計算
方程式

[例題] あるお金持ちが x 万円の財産を持っていた。そのうち 300 万円を 1 年の生活費に充てて、残りを投資して $\dfrac{4}{3}$ 倍に増やした。このことを 3 年繰り返したら財産が倍になった。(Newton より改変)

式で表すと

元の財産　x

1 年目の残高 $(x-300)\cdot\dfrac{4}{3}$

2 年目の残高 $((x-300)\cdot\dfrac{4}{3}-300)\cdot\dfrac{4}{3}$

3 年目の残高 $(((x-300)\cdot\dfrac{4}{3}-300)\cdot\dfrac{4}{3}-300)\cdot\dfrac{4}{3}$

だから $(((x-300)\cdot\dfrac{4}{3}-300)\cdot\dfrac{4}{3}-300)\cdot\dfrac{4}{3}=2x$

式の計算

方程式

分配法則より $x \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 300 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 300 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 300 \cdot \frac{4}{3} = 2x$

計算すると $\frac{64}{27}x - \frac{14800}{9} = 2x$

(II)(iv) より両辺から $2x$ を引いて $\frac{14800}{9}$ を加えても等号が成り立つから

$$\frac{64}{27}x - 2x = \frac{14800}{9}$$

分配法則より $\left(\frac{64}{27} - 2\right)x = \frac{14800}{9}$

計算すると $\frac{10}{27}x = \frac{14800}{9}$

(II)(iv) より両辺を $\frac{10}{27}$ でわっても等号が成り立つから

$$x = \frac{14800}{9} \div \frac{10}{27} = 4440$$

式の計算

おまけ

ニュートン:「文章の中に 数とか量の関係が出てくる問題を解くには, 問題を英語またはその他の言語から量の間の関係を表すのに適した代数の言葉にほんやくする以外に何もする必要はない。」

ライプニッツ:「式が代わりに考えてくれる。」

子供時代のアインシュタイン:「おじさん。代数ってなあに?」
アインシュタインのおじさん:「ずるい算数だよ。」

不等式

"$<$" の性質

"$<$" の性質

2 つの実数 a, b があるとき $a < b$, $a = b$, $a > b$ のどれか一つが成り立ち，任意の実数 a, b, c に対して

(i) $a < b, b < c \;\Rightarrow\; a < c$

(ii) $a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c, a - c < b - c$

(iii) $a < b, c > 0 \;\Rightarrow\; ac < bc, \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

$$a < b, c < 0 \;\Rightarrow\; ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

「$a < b$ または $a = b$」のことを $a \leqq b$ で表す．$<$ と同様な性質を持つ。

不等式

区間

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。
a, b を実数とするとき

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x \leqq b\} : a \leqq x \leqq b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x < b\} : a \leqq x < b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合} \\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} : a < x \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqq b\} : x \leqq b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}
\end{aligned}
$$

のような集合を区間という.

$[a,b]$ $[a,b)$ (a,∞) $(-\infty,b]$

不等式
1 次不等式

1 次不等式 $ax+b>0$ の解は,

(i) $a>0$ のとき

$$ax+b>0 \quad\Leftrightarrow\quad ax>-b \quad\Leftrightarrow\quad x>-\frac{b}{a}$$

だから $x>-\dfrac{b}{a}$.　区間で表すと $(-\frac{b}{a},\infty)$

(ii) $a<0$ のとき

$$ax+b>0 \quad\Leftrightarrow\quad ax>-b \quad\Leftrightarrow\quad x<-\frac{b}{a}$$

だから $x<-\dfrac{b}{a}$.　区間で表すと $(-\infty,-\frac{b}{a})$

不等式

2 次不等式

準備 1. 因数定理

多項式 $P(x)$ が $x-a$ で割り切れる $\iff$ $P(a)=0$

不等式

2 次不等式

準備 2. 二次方程式の解の公式

二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a,\ b,\ c \text{ は定数} \quad a \neq 0)$$

の解は

(i) $b^2 - 4ac > 0$ のとき　$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ のとき　$x = -\dfrac{b}{2a}$

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ のとき 実数解を持たない。（後で述べるが複素数解を持つ）

$b^2 - 4ac$ を判別式といい D で表す.

不等式
2 次不等式

$ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とする。

2 次不等式の解

$D>0$ のとき $ax^2+bx+c=0$ は二つの異なる実数解 $x=\alpha,\beta$ $(\alpha<\beta)$ を持つが, $a>0$ のとき

(i) $ax^2+bx+c>0$ の解は $x<\alpha$ または $x>\beta$

(ii) $ax^2+bx+c<0$ の解は $\alpha<x<\beta$

$D<0$, $a>0$ のとき $ax^2+bx+c=0$ は実数解を持たないので

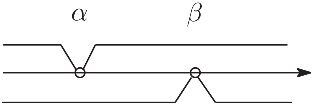
(i) $ax^2+bx+c>0$ の解はすべての実数 x

(ii) $ax^2+bx+c<0$ は解を持たない。

不等式

2 次不等式

[前半の確かめ] 因数定理により $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$



符号を調べると $a>0$ だから

x	$x<\alpha$	α	$\alpha<x<\beta$	β	$\beta<x$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$a(x-\alpha)(x-\beta)$	$+$	0	$-$	0	$+$

だから

(i) $ax^2+bx+c>0$ の解は $x<\alpha$ または $x>\beta$

(ii) $ax^2+bx+c<0$ の解は $\alpha<x<\beta$