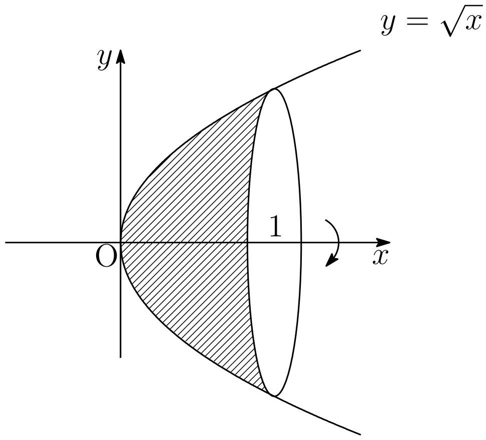
環境基礎解析学 I 第 14 回解答

1 $y=\sqrt{x}$ のグラフ, $x=0$, $x=1$ と x 軸で囲まれる図形を x 軸の周りで 1 回転してできる図形の体積を求めよ.

この立体を 点 $(x,0,0)$ を通り x 軸と垂直な平面で切った切り口は半径 $\sqrt{x}$ の円であり, 面積は πx であるから体積は

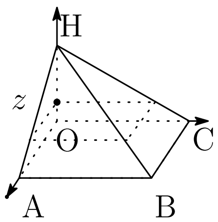
$$V=\int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2 dx=\left[\pi\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$



2. 図のような空間図形の体積を求めよ。ただし

A$(a,0,0)$, B$(a,b,0)$, C$(0,b,0)$, H$(0,0,h)$

とする。



これは OABC を底面とする高さ h の錐体である。底面積 S は $S=ab$, 高さ z で xy 平面に平行に切った切り口の面積を $S(z)$ とすると底面と切り口は相似で

相似比 $=h:(h-z)$, 面積比 $=h^2:(h-z)^2$

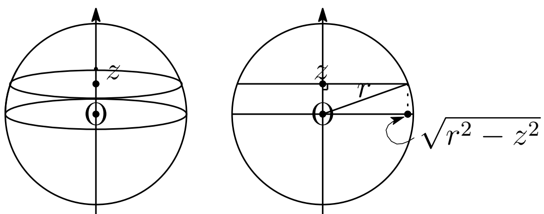
だから

$$S(z)=\frac{(h-z)^2}{h^2}S$$

体積はこれを z について積分して

$$\int_0^h \frac{(h-z)^2}{h^2} S\,dz = S\int_0^h \left(1 - 2\frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2}\right) dz = S\left[z - \frac{z^2}{h} + \frac{z^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}abh$$

3. (1) 図のような半径 r の球の体積を求めよ。



斜めから見た図 横から見た図

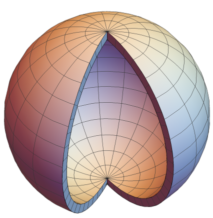
$(0,0,z)$ をとおり z 軸に垂直な面で切った切り口は円板であり、その半径は図より $\sqrt{r^2 - z^2}$ の円板だから, 切り口の面積は $\pi(r^2 - z^2)$, したがって体積はこれを積分して

$$\int_{-r}^{r} \pi(r^2 - z^2)\,dz = \pi\left[r^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi\left[r^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

(2) (1) で求めた球の体積を $V(r)$, 表面積を $S(r)$ とし, $h >$ とする。

$$S(r) < \frac{V(r+h) - V(r)}{h} < S(r+h)$$

であることを説明せよ。



図のような半径 r と半径 $r+h$ の球面で囲まれた部分 $G(h)$ を考える。（図では一部を切り開いて表示してある。）$G(h)$ の体積は $V(r+h) - V(r)$ であるが, 厚みが h であることから

$$S(r)h < V(r+h) - V(r) < S(r+h)h$$

と考えられる。この両辺を h で割れ。

(3) (2) で $h \to 0$ とすることにより $S(r)$ を r で表せ。

$h \to 0$ とすると $S(r+h) \to S(r)$ であるから

$$S(r) \leqq \frac{dV(r)}{dr} \leqq S(r)$$

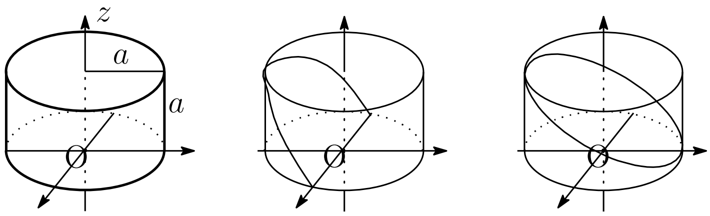
一方

$$\frac{dV(r)}{dr} = (\frac{4}{3}\pi r^3)' = 4\pi r^2$$

であるから

$S(r) = 4\pi r^2$

4.

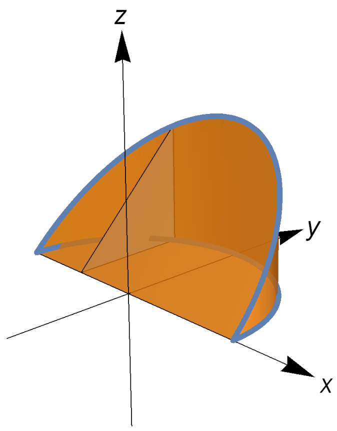


(a) (b) (c)

横から見たところ →

(a): πa^3

(b):



図形を x 軸に垂直な平面で切った切り口は図のような直角 2 等辺三角形である。この y 軸に平行な辺の長さは $\sqrt{a^2 - x^2}$ だから三角形の面積は $\dfrac{1}{2}(a^2 - x^2)$。したがって体積は

$$V = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{3}a^3$$

(c)：円柱の半分だから $\dfrac{1}{2}\pi a^3$