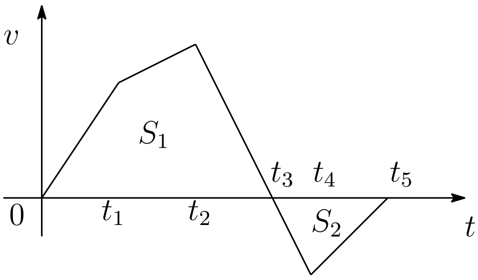
解析基礎 第12回問題 解答

1. 直線上を運動する動点 P がある. 時刻 t での P の速度 $v(t)$ のグラフは図のようである.



(1) 最も速度が大きくなる時刻はいつか

最も速度が大きくなる時刻は 縦座標が最大になる点だから t_2.

(2) 最も出発点から遠ざかる時刻はいつか. またそのときの出発点からの距離をグラフと t 軸で囲まれる図形の面積 S_1, S_2 を用いて表せ.

$0 < t < t_3$ では $v(t) > 0$ だから点は右方向に運動する. $t = t_3$ で一瞬停止して $t_3 < t < t_5$ では $v(t) < 0$ だから点は左方向に運動する. したがって, 最も出発点から遠ざかる時刻は 最も右へ行く時刻だから $t = t_3$. そのときの出発点からの距離は

$$\int_0^{t_3} v(t)\,dt = S_1.$$

(3) 時刻 t_5 での出発点からの距離と, それまでに動いた道のりを S_1, S_2 を用いて表せ.

時刻 t_5 での出発点からの位置の変化量は

$$\int_0^{t_5} v(t)\,dt = \int_0^{t_3} v(t)\,dt + \int_{t_3}^{t_5} v(t)\,dt$$

ところで $t_3 < t < t_5$ の範囲では $v < 0$ であるから $\displaystyle\int_{t_3}^{t_5} v(t)\,dt = -S_2$

となるので $= S_1 - S_2$

それまでに動いた道のりは

$$\int_0^{t_5} |v(t)|\,dt = \int_0^{t_3} |v(t)|\,dt + \int_{t_3}^{t_5} |v(t)|\,dt = S_1 + S_2.$$

2. 空中を自由落下する物体は地球の引力によって鉛直下向きに $g\,(= 9.8[m/s^2])$ の加速度が生じる。つまり, 時刻 $t[s]$ の下向きの速度を $v(t)[m/s]$ とするとき

$$\frac{d}{dt}v(t) = g$$

である. したがって速度 $v(t)$ は g の原始関数である. 従って時刻 $0[s]$ から $t_1[s]$ までの速度の変化は, 「速度と座標の変化量の関係」と同様の考え方で定積分を用いて

$$v(t_1) - v(0) = \int_0^{t_1} g\,dt = gt_1$$

のように求められる. (記号 t_1 を使ったのは積分に使われる変数 t と同じ記号を使いたくなかったからです。) だから t_1 を t に置き換えることにより時刻 t での速度 $v(t)$ は $v(0)$, g を用いて

$$v(t) = gt + v(0)$$

と表される.

(2) 時刻 $t_1[s]$ での物体の座標を $y(t_1)[m]$ とすると 「速度と座標変化量の関係」は

$$y(t_1) - y(0) = \int_0^{t_1} v(t)dt$$

であるから (1) の結果を使って

$$y(t_1) - y(0) = \int_0^{t_1} v(t)\,dt = \int_0^{t_1} (gt + v(0))\,dt$$

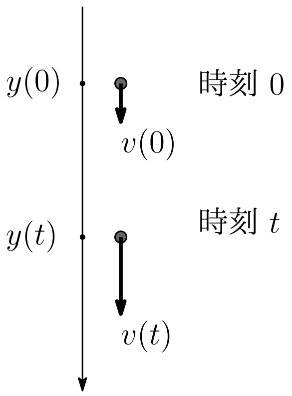
となるが、授業中にやった「定数関数と一次関数の定積分」の結果を使えば

$$= \frac{1}{2}gt_1^2 + v(0)t_1$$

となる. だから t_1 を t に置き換えることにより時刻 t での座標 $y(t)$ は $y(0)$, $v(0)$, g を用いて

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v(0)t + y(0)$$

と表される.



3.

(1) $2x+6=t$ とおくとこの式を両辺 x で微分して $\dfrac{dt}{dx}=2$ すなわち $dx=\dfrac{dt}{2}$ だから

$$\int (2x+6)^4\,dx=\int t^4\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^4\,dt=\frac{1}{2}\frac{t^5}{5}=\frac{1}{10}(2x+6)^5$$

したがって

$$\int_{-3}^{2}(2x+6)^4\,dx=\left[\frac{1}{10}(2x+6)^5\right]_{-3}^{2}=10000$$

(2) $2x+1=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2$ すなわち $dx=\dfrac{dt}{2}$ だから

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx=\int \sqrt{t}\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}},$$

したがって

$$\int_{0}^{4}\sqrt{2x+1}\,dx=\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{4}=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

(3) (2) より $\sqrt{2x+1} = \left(\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right)'$ だから部分積分法により

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x+1}\,dx &= \int x\left(\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right)' dx \\
&= x\left(\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right) - \int \left(\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right) dx \\
&= x\left(\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{3}\int (2x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx
\end{aligned}$$

ここで (2) と同様にして $\int (2x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{5}(2x+1)^{\frac{5}{2}}$ が分かるので

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{1}{15}(3x-1)(2x+1)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

または (2) と同じ変数変換で

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x+1}\,dx &= \int \frac{t-1}{2}\sqrt{t}\,\frac{dt}{2} \\
&= \frac{1}{4}\int t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{15}(3x-1)(2x+1)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx = \left[\frac{1}{15}(3x-1)(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{121}{5} - \frac{13}{3} = \frac{298}{15}$$

(4) $\int \sin x\,dx = -\cos x$ だから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$$

(5) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$

(6) $2x = t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 2$ すなわち $dx = \dfrac{dt}{2}$ だから

$$\int \sin(2x)\,dx = \int \sin t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0) = 1$$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$

(8) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$ であるから $\displaystyle\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' = \sin 2x$ したがって

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'\,dx \\ &= \left[x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\,dx\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x$ だから

$$\begin{aligned}&= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\pi\right) + \left[\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$